МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ М. П. ДРАГОМАНОВА

Фізико-математичний факультет

“Затверджено”
На засіданні Приймальної комісії
НПУ імені М. П. Драгоманова
Протокол № 5 від «18» лютого 2019р.
Голова Приймальної комісії
__________Андрущенко В. П.

“Рекомендовано”
Вченою радою Фізико-математичного факультету
Протокол №5 від «28» січня 2019р.
Голова Вченої ради
___________Працьовитий М.В.

Програма додаткового вступного випробування (співбесіди)

з математики

для громадян України, іноземних громадян та осіб без громадянства,

при вступі на навчання для здобуття ступеня магістра

на базі здобутого ступеня бакалавра /

освітньо-кваліфікаційного рівня спеціаліста

галузь знань **111 Математика**

спеціальність **111 Математика**

освітні програми **Фінансова математика,**
Фінансова та актуарна математика

Київ - 2019

1. ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

Метою додаткового вступного випробування з математики є контроль рівня загальної математичної культури і перевірка фактичних знань, умінь та навичок з фундаментальних розділів математики, які є базовими для успішного продовження навчання для досягнення освітнього ступеня «магістр» за спеціальністю 111 Математика.

Програма додаткового вступного випробування містить основні і найбільш важливі в ідейно-теоретичному і практичному відношенні питання з курсів лінійної алгебри, алгебри і теорії чисел, аналітичної і диференціальної геометрій, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, комплексного аналізу, теорії ймовірностей і математичної статистики.

Екзаменовані повинні володіти теоретико-множинною і логічною символікою, основними поняттями алгебри і теорії чисел (алгебраїчна операція, група, кільце, поле, векторний простір, лінійна залежність і лінійна незалежність, базис і розмірність простору, лінійні оператори, матриці і визначники, прості числа, подільність, конгруенції, многочлени); мати чітке уявлення про основні числові системи і їх будову, володіти навичками розв'язування систем лінійних рівнянь, знати основні арифметичні застосування теорії конгруенцій.

Екзаменовані мають бути ознайомленими як з груповою, так і зі структурною точкою зору на геометрію, із сучасним аксіоматичним методом, основними фактами геометрії Лобачевського; мати загальні уявлення про елементи багатовимірної геометрії афінного і евклідового просторів, різні неевклідові геометрії; вміти застосовувати теоретичні знання на практиці, зокрема, до доведення теорем і розв‘язання задач шкільного курсу геометрії; використовувати знання топології при означенні ліній, поверхонь, поверхонь з межею, геометричного тіла, тощо. Це означає, що при відповіді екзаменовані повинні продемонструвати достатньо широкий погляд на геометрію та її методи, а також на елементарну геометрію з точки зору вищої, готовність викладати шкільну геометрію, незалежно від того на якій аксіоматиці вона побудована, тобто готовність працювати в школі за будь-яким посібником.

Екзаменовані повинні володіти основними поняттями математичного аналізу (функція, послідовність, ряд, границя, неперервність, похідна, інтеграл, міра); мати чітке уявлення про метричний простір та основні елементарні функції дійсної та комплексної змінної; володіти навичками обчислення границь, похідних, інтегралів; вміти розв'язувати найпростіші типи диференціальних рівнянь; знати застосування диференціального та інтегрального числення, а також диференціальних рівнянь до розв'язування практичних задач.

Програма додаткового вступного випробування містить три групи завдань:

- **завдання 1,2 і 3** контролюють *знання основних фактів теорій* математичних курсів, здатність їх оперативно відтворювати, *відчувати взаємозв'язок* і органічну єдність понять, фактів та теорій. Зміст цих завдань черпається з розділу 4.1. “Теоретичні питання з математики”;
- **завдання 4** в тестовій формі контролює *знання основних фактів теорій* математичних курсів. Зміст цього завдання черпається з розділу 4.2. “Завдання для перевірки рівня математичної культури”.

2. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ АБІТУРІЄНТА НА ВСТУПНОМУ ФАХОВОМУ ВИПРОБУВАННІ

(ТІЛЬКИ ДЛЯ ГРОМАДЯН УКРАЇНИ)

За шкалою університету	***Визначення***	***Характеристика відповідей абітурієнта***	
		на питання теоретичного змісту	***на питання практичного змісту***
0-99 бали	***Низький***	Абітурієнт не усвідомлює змісту питання білету, тому його відповідь не має безпосереднього відношення до поставленого питання. Наявна повна відсутність уміння міркувати.	Обсяг розв'язаних задач < 50%. У абітурієнта відсутня просторова уява, необхідна для розв'язування задачі.
100-139 балів	***Задовільний***	Відповіді на питання білету носять фрагментарний характер, характеризуються відтворенням знань на рівні запам'ятовування. Абітурієнт поверхово володіє умінням міркувати, його відповіді супроводжуються другорядними міркуваннями, які інколи не мають безпосереднього відношення до змісту запитання.	Обсяг розв'язаних задач у межах 50-75%. Абітурієнт погано володіє графічними засобами відтворення просторових властивостей предметів на площині
140-169 балів	***Достатній***	У відповідях на питання білету допускаються деякі неточності або помилки непринципового характеру. Абітурієнт демонструє розуміння навчального матеріалу на рівні аналізу властивостей. Помітне прагнення	Обсяг правильно розв'язаних задач >75%. Результат розв'язування задачі містить окремі неточності і незначні помилки.

		абітурієнта логічно розмірковувати при відповіді на питання білета.	
170-200 балів	***Високий***	Абітурієнт дає повну і розгорнуту відповідь на питання білету. Його відповіді свідчать про розуміння навчального матеріалу на рівні аналізу закономірностей, характеризуються логічністю і послідовністю суджень, без включення випадкових і випадання істотних з них.	Обсяг правильно розв'язаних задач =100%. Кожна розв'язана задача супроводжується ґрунтовним поясненням. Абітурієнт без помилок відтворює просторові властивості предметів на площині

Якщо абітурієнт під час вступного випробування з конкурсного предмету набрав 0-99 балів, то дана кількість балів вважається не достатньою для допуску в участі у конкурсному відборі до НПУ імені М. П. Драгоманова.

Оцінювання рівня знань абітурієнтів проводиться кожним із членів предметної комісії окремо, відповідно до критеріїв оцінювання. Загальний бал оцінювання рівня знань абітурієнта виводиться за результатами обговорення членами комісії особистих оцінок відповідей абітурієнтів. Бали (оцінки) вступного фахового випробування виголошуються головою предметної комісії усім абітурієнтам, хто приймав участь у випробуванні після закінчення іспиту.

3. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ СПІВБЕСІДИ

Фахова комісія аналізує результати співбесіди методом експертної оцінки й колегіально приймає рішення: про «рекомендовано до зарахування» або «не рекомендовано до зарахування», з урахуванням співбесіди з мови (української, російської).

4. ЗМІСТ ДОДАТКОВОЇ ПРОГРАМИ ФАХОВОГО ВИПРОБУВАННЯ (СПІВБЕСІДИ)

4.1. Теоретичні питання з математики

4. 1.1. Алгебра і теорія чисел

1. Відношення еквівалентності. Теорема про зв’язок між відношенням еквівалентності на множині і розбиттям множини на класи.
2. Теорема про добування кореня n-го степеня з комплексного числа.
3. Лінійна залежність і лінійна незалежність. Основна теорема про лінійну залежність.
4. Теорема Кронекера-Капеллі (Критерій сумісності СЛР).
5. Крамерівські системи лінійних рівнянь. Теорема Крамера. Формули Крамера.

6. Лінійні простори. Розмірність та базис лінійного простору. Теорема про доповнення лінійно незалежної системи векторів до базису простору.
7. Процес ортогоналізації. Теорема про існування в евклідових просторах ортогональних базисів. Ортонормовані базиси.
8. Лінійні оператори. Матриця лінійного оператора. Теорема про знаходження образу вектора під дією лінійного оператора.
9. Теорема про суму рангу і дефекту лінійного оператора.
10. Теорема про зв’язок між власним значенням лінійного оператора і характеристичним коренем цього оператора.
11. Теорема про ділення з остачею на множині $\mathbb{Z}$ цілих чисел.
12. НСД і НСК цілих чисел. Існування, кількість, способи відшукання. Алгоритм Евкліда.
13. Конгруенції з одним невідомим. Теорема про число розв’язків конгруенції 1-го степеня з одним невідомим.
14. Числові функції $\varphi(n), \sigma(n), \tau(n)$. Ціла і дробова частини дійсного числа. Теорема про мультиплікативність функції Ейлера.
15. Група, підгрупа, нормальна підгрупа (означення, приклади). Критерій нормальної підгрупи. Фактор-група.
16. Кільце, підкільце, ідеал (означення, приклади). Критерій ідеалу. Фактор-кільце.
17. Гомоморфізм (ізоморфізм) груп (кілець, полів). Основна теорема про гомоморфізм груп.
18. Основна теорема про симетричні многочлени.
19. Многочлени з раціональними коефіцієнтами. Ознака Ейзенштейна. Раціональні корені многочлена з раціональними коефіцієнтами.
20. Теорема про будову простого алгебраїчного розширення поля. Позбавлення від алгебраїчної ірраціональності в знаменнику дробу.

4.1.2. Геометрія

1. Теореми про алгебраїчні властивості та геометричні застосування скалярного, векторного та мішаного добутків.
2. Теореми про відстань точки до прямої на площині і в просторі. Відстань між мимобіжними прямими.
3. Теорема про фокальні властивості еліпса, гіперболи та параболи. Полярні рівняння конічних перерізів.
4. Теорема про оптичні властивості параболи.
5. Теорема про класифікацію центральних алгебраїчних кривих 2-го порядку.
6. Група афінних перетворень площини та її підгрупи. Основна теорема про афінні перетворення.
7. Теореми Шаля про класифікацію рухів площини.
8. Група перетворень подібності площини та її підгрупи. Теорема про структуру перетворення подібності.
9. Теореми про геометричний зміст лінійних нерівностей з двома і трьома змінними.

10. Теореми про центр алгебраїчної поверхні 2-го порядку. Класифікація поверхонь за кількістю центрів.
11. Теорема про несуперечливість аксіоматики Вейля трьохвимірного евклідового простору.
12. Критерій розв'язності задач на побудову циркулем та лінійкою.
13. Зображення многогранників. Теорема Польке-Шварца.
14. Малий та великий принципи двоїстості. Теореми Дезарга на площині і в просторі.
15. Формули Френе для просторової кривої.
16. Типи точок на гладкій поверхні. Теорема про зв'язок гаусової кривизни з коефіцієнтами першої та другої квадратичних форм поверхні.
17. Критерій неперервності відображення топологічних просторів.
18. Класифікація топологічно правильних многогранників. Теорема Ейлера.
19. Взаємне розміщення прямих на площині Лобачевського. Теорема про відстань між паралельними прямими на площині Лобачевського.
20. Теорема існування (без доведення) і єдиності площі многокутника. Рівновеликість та рівноскладеність многокутників. Теорема Больяй-Гервіна (без доведення).

4.1.3. Математичний аналіз

1. Межі числових множин. Теорема про існування точної верхньої (точної нижньої) межі множини.
2. Теорема про існування границі монотонної та обмеженої послідовності. Число e.
3. Зчисленні множини та їх властивості. Теореми про потужність множин цілих, раціональних та алгебраїчних чисел.
4. Континуальні множини. Теорема про незчисленність множини точок відрізка $[0,1]$. Приклади континуальних множин.
5. Теорема Больцано–Вейєрштрасса про існування часткових границь для числової послідовності.
6. Різні означення границі функції в точці та їх еквівалентність.
7. Перша і друга важливі границі та наслідки з них.
8. Властивості функцій, неперервних на відрізку.
9. Теорема про існування, монотонність і неперервність оберненої функції для функції, визначеної на відрізку $[a,b]$.
10. Основні теореми диференціального числення (Ролля, Лагранжа, Коші).
11. Локальні екстремуми функції однієї змінної. Необхідна умова екстремуму. Достатні умови екстремуму.
12. Формула Тейлора для функції однієї змінної. Різні форми залишкового члена.
13. Класи функцій, інтегровних за Ріманом. Теорема про інтегровність неперервної функції.

14. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею інтегрування. Існування первісної неперервної функції. Формула Ньютона–Лейбніца.
15. Достатні умови збіжності знакододатних числових рядів.
16. Знакозмінні ряди. Теорема Лейбніца. Абсолютно та умовно збіжні числові ряди та їх властивості.
17. Поточково і рівномірно збіжні функціональні послідовності і ряди. Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.
18. Необхідні умови диференційовності функції багатьох змінних. Достатня умова диференційовності функції багатьох змінних.
19. Поняття степеневого ряду. Розвинення основних елементарних функцій у степеневий ряд.
20. Теореми Коші–Адамара і Абеля для функцій дійсної і комплексної змінної. Інтрвал і круг збіжності.
21. Поняття метричного простору. Приклади метричного просторів. Відкриті і замкнені множини в метричних просторах та їх властивості.
22. Поняття повного метричного простору. Повнота метричних просторів $R_n,\ l_2,\ C_{[a,b]}$.
23. Компактні множини в метричному просторі. Критерій компактності множини в просторі R^n.
24. Теорема Банаха про стискуючі відображення та її застосування.
25. Теорема про зв'язок між інтегровністю за Ріманом та за Лебегом.
26. Різні види збіжності функціональних послідовностей та взаємозв'язок між ними.
27. Поняття похідної функції комплексної змінної. Критерій диференційовності функції комплексної змінної.
28. Інтегральна теорема Коші.
29. Різні означення аналітичної функції та їх еквівалентність.
30. Основна теорема про лишки та її застосування до обчислення інтегралів.
31. Лінійна залежність: лінійна незалежність функцій. Критерій лінійної незалежності розв'язків лінійного однорідного диференціального *n*-го порядку.
32. Структура загального розв'язку лінійного однорідного та неоднорідного диференціальних рівнянь вищого порядку.
33. Лінійні однорідні диференціальні рівняння вищого порядку зі сталими коефіцієнтами.
34. Мішана задача для однорідного рівняння коливання струни.
35. Задача Діріхле для рівняння Лапласа для круга.

4.1.4. Теорія ймовірностей

1. Поняття ймовірнісного простору. Аксіоматичний підхід до означення ймовірності. Властивості ймовірності як функції множини.

2. Умовні ймовірності. Попарна незалежність подій та незалежність подій в сукупності. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.
3. Послідовність незалежних випробувань. Формула Бернуллі. Асимптотична теорема Пуассона.
4. Послідовність незалежних випробувань. Локальна теорема Муавра-Лапласа.
5. Поняття випадкової величини. Функція розподілу випадкової величини та її властивості. Лебегівська класифікація функцій розподілу.
6. Математичне сподівання і дисперсія випадкової величини та їх властивості.
7. Нерівність Ієнсена для математичних сподівань та наслідки з неї.
8. Закон великих чисел (теорема Бернуллі, теорема Чебишова, теорема Маркова).
9. Посилений закон великих чисел (теорема Бореля, теорема Колмогорова) та його застосування.
10. Поняття про центральну граничну теорему. Інтегральна теорема Муавра-Лапласа як наслідок центральної граничної теореми. Застосування інтегральної теореми Муавра-Лапласа.

4.2. ЗАВДАННЯ ДЛЯ ПЕРЕВІРКИ РІВНЯ МАТЕМАТИЧНОЇ КУЛЬТУРИ

4.2.1 Алгебра і теорія чисел

1. На множині $M_8 = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ задати відношення еквівалентності та знайти класи еквівалентності, визначені цим відношенням.
2. Визначити, якими властивостями володіє відношення ρ, задане на множині $M_5 = \{1,2,3,4,5\}$, якщо: $\rho = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (3,3),\ (4,5),\ (5,4)\}$. Чи є ρ відношенням еквівалентності? Якщо ні, то чи можна його доповнити до відношення еквівалентності?
3. Знайти всі корені 3-го степеня з числа 8.
4. Знайти всі корені 5-го степеня з числа 32.
5. Розв’язати двочленне рівняння: $(z-3+2i)^3 = \sqrt{12}+2i$.
6. Визначити, чи є добуток $a_{14}a_{23}a_{35}a_{56}a_{62}a_{41}$ членом визначника деякого порядку. Якщо так, то визначити його знак.
7. Довести, що добутком двох парних підстановок є парна підстановка.
8. Знайти порядок елемента $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ в симетричній групі підстановок S_4.
9. Розв’язати систему лінійних рівнянь: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$

10. Знайти фундаментальну систему розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

11. Розкласти визначник за елементами третього стовпця: $\begin{vmatrix} 1 & 2 & a & 1 \\ 2 & -1 & b & 0 \\ 0 & 1 & c & 2 \\ -2 & 0 & d & 1 \end{vmatrix}$.

12. Знайти всі матриці, комутативні матриці: $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

13. Розв'язати матричним методом систему рівнянь: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$

14. Визначити усно лінійно залежною чи лінійно незалежною є система векторів: $\vec{a}_1 = (237, 521, 43)$, $\vec{a}_2 = (37, 51, 44)$, $\vec{a}_3 = (8, 57, 49)$, $\vec{a}_4 = (7, 8, 9)$.

15. Визначити усно, лінійно залежною чи лінійно незалежною є система векторів: $\vec{a}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{a}_2 = (23, 51, 44)$, $\vec{a}_3 = (3, 6, 9)$.

16. Визначити усно, лінійно залежною чи лінійно незалежною є система векторів: $\vec{a}_1 = (1, 0, 0, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (0, 2, 0, 0, 2)$, $\vec{a}_3 = (0, 0, 3, 0, 3)$, $\vec{a}_4 = (0, 0, 0, 4, 4)$.

17. Система векторів $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ лінійно незалежна. Визначити, лінійно залежною чи лінійно незалежною є система $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$, $\vec{a}_2$?

18. Визначити, яка із систем лінійних рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 3; \end{cases}$

є крамеровською.

19. Розв'язати систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 2; \end{cases}$

за допомогою формул Крамера.

20. Визначник системи лінійних однорідних рівнянь рівний нулю. Чи має така система розв'язки?

21. Визначити, чи є сума двох розв'язків системи лінійних рівнянь розв'язком цієї системи.

22. Визначити, чи є лінійна комбінація розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь розв'язком цієї системи.

23. Система лінійних однорідних рівнянь має нескінченну кількість розв'язків. Яким є її визначник?
24. Рядки матриці A лінійно незалежні. Чи обов'язково лінійно незалежними є її стовпці?
25. Чи вірне твердження: будь-які дві максимальні лінійно незалежні підсистеми деякої системи векторів мають однакову кількість елементів? Відповідь обгрунтувати.
26. Чи може одна і та ж сама система векторів мати декілька різних базисів. Відповідь обгрунтувати.
27. У якому випадку система векторів має єдиний базис?
28. Розв'язати матричне рівняння: $AXB = C$, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
29. Перевірити, чи утворює лінійний підпростір в арифметичному векторному просторі V_n множина всіх векторів, у кожного з яких усі координати рівні між собою. Якщо так, знайти його базис і ранг.
30. Знайти базис і розмірність поля комплексних чисел C над полем дійсних чисел R.
31. Що можна сказати про лінійну залежність системи, яка складається із 1001 вектора простору розмірності 1000?
32. Дослідити на сумісність систему лінійних рівнянь $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 1. \end{cases}$
33. Розв'язати матричне рівняння: $X\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.
34. Ортогоналізувати систему векторів: $\vec{a}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{a}_2 = (4, 3, 2, 1)$, $\vec{a}_3 = (5, 5, 5, 5)$, $\vec{a}_4 = (1, 1, 1, 1)$.
35. Довести, що подібні матриці мають однакові визначники.
36. Чи може лінійна оболонка 100 векторів мати розмірність 100? Якщо так, то при якій умові це відбувається?
37. Підпростори U і V векторного простору L_7 мають розмірність 6, $U \neq V$. Знайти розмірність їх перетину $U \bigcap V$?
38. Підпростір U евклідового простору E_{10} має розмірність 3. Чому рівна: 1) розмірність його ортогонального доповнення $U^{\perp}$; 2) розмірність перетину $U \bigcap U^{\perp}$?

39. З'ясувати, чи є лінійним оператор φ, який довільному вектору $\vec{x}=(x_1, x_2)$ з арифметичного векторного простору V_2 ставить у відповідність вектор:

1) $\vec{x}\varphi=(x_2, x_1)$; 2) $\vec{x}\varphi=(x_1, x_2+1)$.

У випадку лінійної залежності знайти його матрицю в тому базисі, в якому задано координати векторів $\vec{x}$ і $\vec{x}\varphi$.

40. Лінійний оператор φ векторного простору L_3 в деякому базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ задано матрицею $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Знайти дефект $d=\dim(Ker\,\varphi)$ цього оператора.

41. Лінійний оператор φ векторного простору L_7 в деякому базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_7\}$ задано матрицею A. Чи існує до матриці A обернена, якщо:

1) дефект $d=\dim(Ker\,\varphi)$ рівний 0;
2) дефект $d=\dim(Ker\,\varphi)$ рівний 1;
3) дефект $d=\dim(Ker\,\varphi)$ рівний 7?

42. Лінійний оператор φ векторного простору L_3 в деякому базисі $B\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ задано матрицею A. Знайти A, якщо відомо, що $Ker\,\varphi=L_3$.

43. Нехай φ і ψ — невироджені лінійні оператори векторного простору L_2. Чи може бути виродженим оператором цього простору оператор:

1) $\varphi+\psi$; 2) $\varphi\cdot\psi$?

Чи є ці операторами лінійними?

44. Нехай φ — лінійний оператор дійсного векторного простору L_2. З'ясувати, чи може оператор φ в цьому просторі:

1) не мати власних значень;
2) мати 1 власне значення;
3) мати 2 власних значення;
4) мати 3 власних значення;
5) мати 4 і більше власних значень?

45. З'ясувати, чи є ядро $Ker\,\varphi$ довільного лінійного оператора φ векторного простору L інваріантним підпростором відносно оператора φ.

46. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є власними векторами лінійного оператора φ. Довести, що лінійна оболонка цих векторів є інваріантним підпростором відносно φ.

47. Чи може нуль-вектор бути власним вектором лінійного оператора φ над векторним простором L_n?

48. У базисі $B\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ векторного простору L_3 матриця A лінійного оператора φ має вигляд $A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$. Якими є вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ цього базису відносно оператора φ?

49. Нехай φ — лінійний оператор векторного простору L_3, $B\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3\}$ — деякий базис цього простору, причому $\vec{e}_1\varphi=\vec{e}_1$, $\vec{e}_2\varphi=2\vec{e}_2$, $\vec{e}_1\varphi=3\vec{e}_3$. Знайти матрицю A цього оператора в базисі B.

50. Чи буде векторний простір L_3 над полем дійсних чисел R евклідовим, якщо за скалярний добуток довільних його векторів $\vec{x}=(x_1,x_2,x_3)$, $\vec{y}=(y_1,y_2,y_3)$ взяти число $x_1y_3+x_2y_2+x_3y_1$?

51. Навести приклади:
   1) скінченної неабелевої групи;
   2) абелевої групи порядку n, де $n\in N$;
   3) нескінченної неабелевої групи;
   4) нескінченної абелевої групи;
   5) групи порядку 2; 6) групи порядку 1; 7) групи порядку 4.

52. Чи існують неабелеві циклічні групи?

53. Знайти всі підгрупи циклічної групи $G=<a>$, якщо $|a|=10$.

54. Знайти розклад на суміжні класи адитивної групи цілих чисел Z за її підгрупою парних чисел $2Z$.

55. Нехай G — група, $H\le G$, $a\in H$. При якій умові $a\cdot H\le G$?

56. Довести, що група порядку 223 є циклічною.

57. Нехай $|G:H|=2$. Довести, що $H\triangleleft G$.

58. Нехай S_3 — симетрична група підстановок, $a_1=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$. Довести, що $<a_1>\ntriangleleft S_3$.

59. Нехай S_3 — симетрична група підстановок, $a_4=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$. Довести, що $<a_4>\triangleleft S_3$.

60. Знайти фактор-групу адитивної групи цілих чисел Z зі її підгрупою парних цілих чисел $2Z$.

61. Нехай $H=Ker\varphi$ — ядро гомоморфізму двох груп, $|H|=1$. З'ясувати, чи є цей гомоморфізм ізоморфізмом.

62. Нехай φ — гомоморфізм адитивної групи цілих чисел Z на мультиплікативну групу $T=\{-1;1\}$. Знайти ядро $Ker\varphi$ цього гомоморфізму.

63. Нехай φ — гомоморфізм групи G на групу T, $|G|=25$, $1\neq|T|\neq 25$. Знайти $|T|$.

64. Нехай $G=<a>$ — циклічна група порядку 4. Задати гомоморфізм φ групи G в себе, що не є ізоморфізмом G на G.

65. Знайти канонічний розклад числа 637.

66. Визначити чиє простим число 221.

67. Знайти $\varphi(37800)$, де $\varphi(h)$ — функція Ейлера.

68. Знайти кількість та суму натуральних дільників числа 847.

69. Визначити чи існують цілі числа x, y такі, що $18x+12y=4$? Відповідь обгрунтувати.

70. Знайти останню цифру числа 3^{101}.

71. Знайти клас лишків, обернений до класу: 1) $K_2^{(3)}$; 2) $K_2^{(4)}$.

72. Об'єднанням яких класів за модулем 12 є клас лишків $K_3^{(4)}$.

73. Скільки розв'язків має конгруенція:
1) $6x\equiv 8\pmod{12}$; 2) $8x\equiv 6\pmod{12}$; 3) $6x\equiv 12\pmod{8}$?

74. Чи утворюють поле множини класів лишків:
1) $K_0^{(2)}, K_1^{(2)}$; 2) $K_0^{(3)}, K_1^{(3)}, K_2^{(3)}$; 3) $K_0^{(4)}, K_1^{(4)}, K_2^{(4)}, K_3^{(4)}$?

75. Розв'язати конгруенцію: $3x\equiv 1\pmod{4}$.

76. Довести, що дільники нуля не можуть бути дільниками одиниці.

77. Навести приклад поля P такого, що $Q\subset P\subset R$, $Q\neq P\neq R$, де Q і R — відповідно поля раціональних і дійсних чисел.

78. Довести, що в полі дільників нуля немає.

79. Довести, що в полі лише два ідеали: нульовий та одиничний.

80. Довести, що в комутативному кільці з одиницею асоційовані елементи породжують той самий головний ідеал.

81. У кільці цілих чисел Z виконати такі дії над його ідеалами:
а) $<4>+<6>$; б) $<4>\bigcap<6>$; в) $<4>\cdot<6>$.

82. Навести приклад двох ненульових матриць, добутком яких є нульова матриця.

83. У кільці $Z_4 = Z/4Z$ знайти всі дільники нуля і дільники одиниці.

84. Знайти всі $n\in Z$, для яких має місце рівність $n+<6>=5+<6>$.

85. Встановити простим чи складеним є число 13 з кільця $Z[i]$.

86. Які з наступних тверджень про кільця є істинними:
а) область цілісності є факторіальним кільцем;

б) кільце головних ідеалів є факторіальним;

в) евклідове кільце є факторіальним;

г) кільце головних ідеалів є евклідовим?

87.Нехай φ — відображення кільця діагональних матриць $K = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| \quad a, b \in Q \right\}$ на кільце раціональних чисел Q, причому $\varphi\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right) = a$ для будь-яких $a, b \in Q$.

Довести, що φ — гомоморфізм, і знайти його ядро.

88.Скільки многочленів можуть бути найбільшим спільним дільником многочленів $f(x)$ та $g(x)$ в кільці:

а) $Z[x]$; б) $Z_2[x]$; в) $Z_5[x]$; г) $R[x]$?

89.Чи для будь-яких многочленів $f(x)$ та $g(x)$ з кільця $Z[x]$ існує їх найбільший спільний дільник?

90.У кільці $Z_5[x]$ виконуються рівності:

$$(x+\bar{1})^2 = x^2 + \bar{2}x + \bar{1} = (\bar{2}x - \bar{3})(\bar{3}x - \bar{2}) = (\bar{4}x + \bar{4})^2.$$

Чи не суперечать вони теоремі про єдиність розкладу многочлена на незвідні множники в кільці $Z_5[x]$?

91.Навести приклад незвідного многочлена другого степеня у кільці:

а) $Z[x]$; б) $Z_5[x]$; в) $Q[x]$; г) $C[x]$?

92.Які з наступних тверджень є вірними для будь-якого многочлена $f(x)$ з кільця $Q[x]$:

а) якщо $f(x)$ має раціональний корінь, то він звідний у $Q[x]$;

б) якщо $f(x)$ звідний у $Q[x]$, то він має раціональний корінь;

в) якщо $f(x)$ звідний у $Q[x]$ і $\deg f(x) = 2$, то він має корінь у Q;

г) якщо $f(x)$ звідний у $Q[x]$ і $\deg f(x) = 4$, то він має корінь у Q?

93.Знайти найбільший спільний дільник многочлена і його похідної:

а) $f(x) = (x^2 - 1)(x+2)^{2004}(x+5)^{2005}$;

б) $f(x) = (x^2+1)(x^2-3)(x^4+1)$, де $f(x) \in R[x]$.

94.Для многочленів $f(x) = x+1$ і $g(x) = x^3 + 2$ із $Q[x]$ знайти многочлени $\varphi(x)$, $r(x)$ із $Q[x]$, що задовольняють умову: $f(x) = g(x) \cdot \varphi(x) + r(x)$, де $r(x) = 0$ або $\deg r < \deg g$.

95.Серед наступних одночленів вказати ті, які не можуть бути вищим членом деякого симетричного многочлена та вказати причину:

а) $x_1^5x_2^3x_3$; б) $x_1^2x_2^3x_3^2$; в) $x_2^2x_3^3x_4^2$; г) $x_1^4x_3^2x_4$; д) $x_1^2x_2^2x_3^2$.

96. Яким є поле розкладу многочлена:

а) $f(x)=x^2-9$; б) $f(x)=x^2-5$;

в) $f(x)=x^3-2x+1$; в) $f(x)=x^4-1$?

97. Що можна сказати про раціональні корені многочлена $f(x)=x^4+4$ та його звідність у кільці $Q[x]$?

98. Не розв'язуючи рівняння $3x^2+17x-14=0$, знайти величину виразу:

$$\frac{3x_1^2+5x_1x_2+3x_2^2+\frac{173}{3}}{4x_1^2x_2+4x_1x_2^2},\quad \text{де } x_1,\ x_2 \text{ — корені рівняння.}$$

99. Що можна сказати про звідність даного многочлена у кільці $Z[x]$:

а) $f(x)=x^4-2x^2-8$; б) $f(x)=x^4+5x^2+6$;

в) $f(x)=x^4-12x^2-16x-2$; г) $f(x)=x^5+5$?

100. Чи є алгебраїчним число:

а) $\sqrt[3]{5}$; б) $1+\pi$; в) $\frac{1-\sqrt{13}}{5}$; г) $\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}$;

д) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$; е) $\frac{1+2i}{1-i}$?

4.2.2 Геометрія

1. Назвати приклади відношень еквівалентності, які використовуються в геометрії (бажано з різних її розділів).
2. Три вектори $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ трьохвимірного векторного простору лінійно залежні. Вектор $\vec{a}_3$ не виражається лінійно через $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$. Чи випливає колінеарність $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$?
3. Чи є умова $\vec{a}\,||\,\vec{b}$ необхідною, достатньою, необхідною і достатньою для $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|$?
4. Чи правильна наступна рівність: $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$?
5. Вектори утворюють замкнений контур. Чи є вони компланарними? Дати коректну відповідь з обгрунтуванням.
6. Вектори утворюють замкнений контур. Чи є вони лінійно залежними ? Дати коректну відповідь з обгрунтуванням.
7. Необхідні, достатні, чи необхідні і достатні умови виражає твердження: мішаний добуток векторів рівний нулю, якщо вектори компланарні?

8. Чи є умова колінеарності векторів необхідною для того, щоб їх скалярний добуток був рівний добутку їх модулів? А достатньою? Відповідь обгрунтувати.
9. Сформулювати твердження протилежне даному: якщо три вектори компланарні, то вони лінійно залежні. Обгрунтувати його або спростувати.
10. Назвати основні застосування скалярного добутку в геометрії.
11. Назвати основні застосування векторного добутку векторів в геометрії.
12. Сформулювати геометричні властивості мішаного добутку векторів.
13. Чи правильно, що будь-який вектор лінійно залежної системи векторів може бути лінійно виражений через решту векторів системи?
14. Чи є вектори $\vec{a}=(2;3),\ \vec{b}=(-1;0),\ \vec{c}=(2;-7)$ компланарними ?
15. Сформулювати суть методу координат на площині.
16. Сформулювати означення системи координат.
17. Назвати координатні лінії полярної системи координат.
18. Назвати основні задачі полярної системи координат в аналітичній геометрії.
19. Яким умовам має задовольняти афінна система координат на площині, щоб формула відстані між точками $M_1(x_1;y_1),\ M_2(x_2;y_2)$ мала вигляд $|M_1M_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_2-y_1)^2}$?
20. В чому суть задачі "скласти умови (аналітичні умови) задання геометричного місця точок" ?
21. Чи правильне твердження: *якщо вектори* $\vec{s}_1$ *і* $\vec{s}_2$ *напряму прямих простору* l_1 *і* l_2 *і вектор* $\overline{M_1M_2}$, $M_1\in l_1$, $M_2\in l_2$, *компланарні, то прямі* l_1 *і* l_2 *перетинаються ?* А обернене ? Сформулювати його.
22. Сформулювати твердження, двоїсте даному: існує по меншій мірі три точки, що не належать одній прямій.
23. Що спільного і відмінного мають такі лінії, як пряма і коло ?
24. Чи залежить поняття алгебраїчної кривої від системи координат, в якій вона розглядається?
25. У якої алгебраїчної кривої другого порядку ексцентриситет дорівнює $\sqrt{2}$?
26. Скількома точками визначається алгебраїчна крива другого порядку на площині? Відповідь частково аргументувати.
27. Чи правильне твердження: алгебраїчна крива з прямою можуть мати не більше, ніж дві спільні точки ?
28. Чи є означення плоскої ліній "Лінія — це геометричне місце точок площини, координати яких задовольняють рівняння $F(x,y)=0$" загальним?
29. Який класифікаційний принцип лежить в основі класифікації кривих: криві алгебраїчні і криві трансцендентні?
30. Чи може пряма перетинати алгебраїчну криву третього порядку в трьох точках ?

31. Чи є в міркуваннях помилка? Кожен рух є афінним перетворенням, тому кожне афінне перетворення успадковує властивості рухів.
32. Сформулювати ознаку афінного перетворення за його аналітичним заданням. Вказати на відмінність понять «ознака» і «означення».
33. Чи існує афінне перетворення, яке заданий паралелограм переводить в інший заданий паралелограм? Відповідь обгрунтувати.
34. Сформулювати твердження обернене даному: рух першого роду, що не має інваріантних точок, є паралельним перенесенням? Якщо обидва твердження правильні, сформулювати критерій.
35. Яким рухом буде композиція осьової симетрії і паралельного перенесення на вектор, який не паралельний осі симетрії?
36. Чи подібні гомотетичні фігури ? А навпаки?
37. Як пов'язані між собою площі двох подібних многокутників ?
38. Фігури F_1 і F_2 рухом площини суміщаються. Чи подібні F_1 і F_2 ?
39. В чому суть групового підходу до геометрії ?
40. В чому особливість осьової симетрії як представника групи рухів?
41. Чи утворює множина осьових симетрій площини групу ?
42. Чи утворює множина центральних симетрій площини групу ?
43. Чи утворює абелеву групу множина рухів площини, а рухів першого роду?
44. Чи утворює абелеву групу множина паралельних перенесень площини?
45. Описати множину нерухомих прямих осьової симетрії.
46. Описати групу симетрій квадрата, трикутника та прямої.
47. Назвати всі елементи груп симетрій кола та прямокутника, що не є квадратом.
48. Чи може паралельне перенесення бути елементом групи симетрій обмеженої фігури? Чи зміниться відповідь, якщо не вимагати обмеженості фігури?
49. Що вивчає евклідова геометрія з точки зору групового погляду на геометрію?
50. Які фігури називають афінно-еквівалентними?
51. Чи афінно-еквівалентні еліпс і коло?
52. Чи може мати обмежена фігура більше одного центра симетрії? Чи зміниться відповідь, якщо зняти умову обмеженості фігури?
53. Ознакою чи критерієм є сформульоване твердження: "Для того щоб рух другого роду був ковзною симетрією необхідно і достатньо, щоб він не мав інваріантних точок"?
54. Назвати основний інваріант групи перетворень подібності.
55. Сформулювати означення самоподібної множини. Навести приклади.
56. Яку поверхню в просторі задає рівняння $x^2 + 4y^2 = 16$?
57. "Аксіома — це твердження, яке не потребує доведення в силу своєї очевидності". Чи правильно це? Відповідь обгрунтувати.

58. В чому суть вимоги *незалежності* до системи аксіом? Як перевіряється її виконання?
59. Як обгрунтовується логічна несуперечливість аксіоматичної теорії ?
60. Що означає побудувати математичну модель аксіоматичної теорії ?
61. Сформулювати теорему Гьоделя про неповноту. З‘ясувати суть вимоги повноти до системи аксіом.
62. На основі яких груп аксіом Гільберта можна довести, що множина точок відрізка прямої є нескінченною ?
63. На основі якої групи аксіом Гільберта можна довести, що множина точок відрізка прямої є континуальною ?
64. Як розв'язується питання про внутрішню та змістовну несуперечливість системи аксіом? Чи є змістовно несуперечливою аксіоматика Вейля? Відповідь обгрунтувати.
65. Сформулювати класичні задачі на побудову, які не розв'язуються за допомогою циркуля та лінійки.
66. Назвати основні методи розв'язування геометричних задач на побудову. В чому суть методу геометричних перетворень ?
67. Яке зображення фігури називається повним ?
68. Яка задача побудови зображення називається позиційною ?
69. В чому суть методу Монжа побудови зображення геометричної фігури?
70. Дати означення проективного простору, навести приклад.
71. Дати означення афінного n-вимірного простору та афінної геометрії.
72. Який розділ математики називається "Абсолютною геометрією" ? Сформулювати два геометричних факти, один з яких належить абсолютній геометрії, а інший — ні.
73. В якій геометрії правильне твердження: "Існує трикутник, навколо якого не можна описати кола"?
74. Кожна точка серединного перпендикуляра до відрізка рівновіддалена від його кінців. Чи є це твердження правильним в абсолютній геометрії?
75. Чи правильне твердження "На площині Лобачевського через точку поза прямою проходить безліч прямих, паралельних даній?"
76. Сформулювати три твердження, які еквівалентні п'ятому постулату Евкліда.
77. Чи правильне твердження: сума кутів трикутника площини Лобачевського є постійною величиною, яка менша двох прямих кутів? Чи існує на площині Лобачевського трикутник з найменшою сумою кутів ?
78. Назвати принципові відмінності сферичної та евклідової геометрії.
79. Чи належить теорія вимірювання довжин відрізків геометрії Лобачевського? Евклідовій геометрії ? Абсолютній геометрії ?
80. Описати модель Келі-Клейна площини Лобачевського.

81. Чи існують на площині Лобачевського трикутник як завгодно великої площі?
82. Чи існують правильні многогранники, гранями яких є правильні 5-кутники і в кожній вершині сходиться по 5 ребер?
83. Скільки існує типів правильних многогранників? З чого випливає висновок, що інших типів немає ?
84. Рівноскладені многогранники — рівновеликі. Чи правильне обернене твердження? Відповідь обгрунтувати посиланням на відомі факти.
85. Чи є рівновеликість многогранників необхідною, достатньою, необхідною і достатньою для їх рівноскладеності ?
86. Чи рівносильні поняття «рівновеликості» та «рівноскладеності» для многогранників?
87. В чому суть третьої проблеми Гільберта? Сформулювати теорему Дена-Кагана.
88. Чи правильне твердження: множина метричного простору є відкритою, якщо вона не містить своєї межі?
89. Означенням, ознакою, критерієм чи властивістю є речення: внутрішність довільної множини топологічного простору є відкритою множиною.
90. Чи кожний метричний простір є топологічним ? А навпаки ? Відповідь обгрунтувати.
91. Дати означення топологічного многовиду. Навести приклади.
92. Яка параметризація кривої називається природною і в чому її переваги?
93. Сформулювати твердження обернене даному: необхідною умовою замкнености множини E топологічного простору є $\partial E \subset E$, де ∂E — межа множини E. Чи правильне воно?
94. Чи буде топологічний простір $[T, \tau]$ зв'язним, якщо $T = [0;1]$, а топологія τ складається з всеможливих підмножин множини T?
95. Чи є зв'язною множина ірраціональних точок відрізка [0;1] в топології індукованій метрикою простору R^1?
96. Сформулювати специфічні топологічні властивості листа Мьобіуса.
97. Дати означення бази топології. Навести приклади.
98. Чи гомеоморфні між собою циліндр і круг з діркою?
99. Чи є замкненою множина X в топологічному просторі $\left(X, 2^X\right)$?
100. Чи є гомеоморфними множини дійсних та ірраціональних чисел?

4.2.3. Математичний аналіз

1. При яких значеннях x виконуються нерівності:

   а) $\left|x^2 - 5x + 6\right| \geq x^2 - 5x + 6$; б) $\left|x^2 - 5x + 6\right| < x^2 - 5x + 6$?

2. Доповнити речення так, щоб воно стало істинним висловленням: 1) аксіоми Кантора і Архімеда,
2) теорема про існування $\sup E$,
3) теорема про існування границі обмеженої монотонної послідовності
є рівносильними означеннями властивості … дійсних чисел.
3. Чи правильне твердження: функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ тотожні:

а) $f_1(x)=\lg x^2$, $f_2(x)=2\lg x$; б) $f_1(x)=\dfrac{x}{x^2}$, $f_2(x)=\dfrac{1}{x}$; в) $f_1(x)=\dfrac{x^2}{x}$, $f_2(x)=x$;

г) $f_1(x)=\dfrac{x}{x}$, $f_2(x)=1$; д) $f_1(x)=\cos x$, $f_2(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$;

е) $f_1(x)=x^2$ для $1\le x\le 2$, $f_2(x)=x^2$ для $1\le x\le 3$; є) $f_1(x)=x$, $f_2(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$;

ж) $f_1(x)=|x|$, $f_2(x)=\sqrt{x^2}$; з) $f_1(x)=1$, $f_2(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$?

4. Чи правильне твердження: функції $f_1(x)$ і $f_2(x)$ взаємно обернені: а) $f_1(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$, $f_2(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$; б) $f_1(x)=1-\sqrt[3]{x}$, $f_2(x)=(1-x)^3$;

в) $f_1(x)=1+\sqrt{x}$, $f_2(x)=(x-1)^2$; г) $f_1(x)=\sqrt{1-x^2}$, $f_2(x)=\sqrt{1-x^2}$;

д) $f_1(x)=-e^{\frac{1-x^2}{2}}$ для $x\in[0;\ +\infty)$ і $f_2(x)=\sqrt{1-2\ln(-x)}$ для $x\in\left[-\sqrt{e};0\right)$;

е) $f_1(x)=\sqrt[3]{1-x^3}=f_2(x)$; є) $f_1(x)=\ln\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, $f_2(x)=f_1(x)$;

ж) $f_1(x)=\sin x$ для $x\in\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$, $f_2(x)=\pi-\arcsin x$ для $x\in[-1;1]$?

5. Чи правильне твердження: функція, визначена на відрізку $[a;b]$, неперервна на цьому відрізку?
6. Чи є функції $f_1(x)=\operatorname{arctg} x$ і $f_2(x)=\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ в інтервалі $(-\infty;+\infty)$ тотожно рівними між собою?
7. Визначити, чи є дані функції оборотніми на своїх областях визначення. Якщо це не так, то виділити підмножини областей визначення, на яких вони будуть оборотніми або встановити, що таких підмножин не існує:

1) $y=|x|$; 2) $y=\dfrac{1}{x^3}$; 3) $y=x^2+2x-3$; 4) $y=\sqrt[3]{x^5}$; 5) $y=\operatorname{sign} x$; 6) $y=\sqrt{x-1}$;

7) $y=x^2\operatorname{sign} x$; 8) $y=2+x-x^2$; 9) $y=x^3-x$; 10) $y=x^4-2x^2-8$;

11) $y=-x|x|-2x+8$; 12) $y=1-\sin x$; 13) $y=9^x-3^x$; 14) $y=\arccos(|x|-1)$;

15) $y=\operatorname{arcctg}(x|x|)$.

8. Знайти композиції функцій $f\circ g$ і $g\circ f$. Встановити області визначення та множини значень знайдених функцій. Чи будуть знайдені функції тотожними:

1) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$; 2) $f(x)=g(x)=\sqrt{1-x^2}$; 3) $f(x)=10^x$, $g(x)=\lg x$;

4) $f(x)=x^5$, $g(x)=x+5$.

9. Нехай $u=\sin x$, $v=\lg x$, $w=1+x$, $y=\dfrac{1}{x}$, $z=\sqrt{x}$. Написати аналітичні вирази для наступних композицій функцій та знайти їхні області визначення та множини значень:

   1) $u\circ v\circ w\circ z$; 2) $z\circ y\circ w\circ v\circ u$.

10. Знайти функцію $f^{-1}(x)$, обернену до заданої $f(x)$, встановити її область визначення та множину значень і, при можливості, побудувати її графік та розв'язати рівняння $f(x)=f^{-1}(x)$:

    1) $f(x)=3^{1-x}$; 2) $f(x)=x^2-x+1,\ x>0{,}5$; 3) $f(x)=1+\lg(x+2)$;

    4) $f(x)=2^x\left(2^x+1\right)^{-1}$; 5) $f(x)=\log_x 10$; 6) $f(x)=2^{x-1}-2^{-x}$.

11. Знайти яку-небудь функцію f, що задовольняє умову:

    1) $f(x-2)=\dfrac{1}{x+1},\ x\in(-\infty;+\infty),\ x\neq -1$; 2) $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x^2+1,\ x\in(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

12. З відомих теорем (назвати їх) випливає, що неперервна на відрізку $[a;b]$ функція $y=f(x)$ має такі властивості:

    1) функція $y=f(x)$ обмежена на $[a;b]$;

    2) на $[a;b]$ функція $y=f(x)$ набуває найбільшого та найменшого значень M та m відповідно;

    3) функція $y=f(x)$ набуває всіх значень з $[m;M]$, якщо $x\in[a;b]$.

    Чи правильно, що будь-яка функція $y=f(x)$, яка має властивості 1)-3), є неперервною на $[a;b]$?

13. Чи правильне твердження: якщо функції f і g мають головний період T, причому $D(f)\cap D(g)\neq\varnothing$, то функція $f+g$ також має своїм головним періодом число T?
14. Чи правильне твердження: якщо функція монотонна, то вона неперіодична?
15. Чи правильне твердження: сума двох монотонних функцій є монотонною функцією?
16. Чи правильне твердження: сума двох немонотонних на множині M функцій є немонотонна на M функція?
17. Чи правильне твердження: сума двох зростаючих функцій – зростаюча функція?
18. Чи правильне твердження: якщо функція зростаюча на R, то вона необмежена?
19. Чи правильне твердження: якщо функція не має ні найбільшого, ні найменшого значень, то вона необмежена?
20. Чи правильне твердження: функція $y=f(x)$ має обернену тоді й тільки тоді, коли $y=f(x)$ – зростаюча або спадна функція?
21. Чи правильне означення: функція $y=f(x)$ називається непарною, якщо її область визначення симетрична відносно початку координат і для будь-яких двох різних x і $-x$ з області визначення функції виконується рівність $f(-x)=-f(x)$?
22. Чи правильне твердження: якщо функція $y=f(x)$ – періодична, то вона має найменший додатний період? (Будь-яка періодична функція має головний період).

23. Чи правильне дане твердження: якщо функція неперервна на інтервалі, то вона і обмежена на цьому інтервалі.
24. На якому математичному факті грунтується метод інтервалів розв'язування нерівностей?
25. Чи правильне твердження: якщо функція обмежена, то вона набуває в деяких точках області визначення найбільшого і найменшого значень?
26. Перевірити правильність твердження: кожна обмежена числова послідовність є збіжною.
27. Чи правильне твердження: послідовність (x_n) є збіжною до x, якщо $\forall\varepsilon > 0\ \forall N = N(\varepsilon): \forall n > N \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$?
28. Серед наведених послідовностей дійсних чисел (x_n) і послідовностей комплексних чисел (z_n) вказати спадні, зростаючі, немонотонні:

а) $x_n = \dfrac{6-n}{5n-2}$; б) $x_n = \dfrac{2^n}{n}$; в) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$; г) $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$;

д) $z_n = \left(\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n^2} + i\dfrac{3n}{6n+4}\right)$; е) $z_n = \left(\sqrt[3]{3n} + i\sqrt[3n]{n}\right)$.

29. Чи правильне твердження: $a \neq \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n > N : |x_n - a| \geq \varepsilon$?
30. Чи правильне твердження: послідовність $(\sin n)$ збіжна?
31. Відомо, що послідовності (x_n) та (y_n) розбіжні. Чи будуть послідовності $(x_n + y_n)$, $(x_n y_n)$ збіжними? розбіжними?
32. Чи правильне твердження: якщо в будь-якому околі точки a міститься безліч членів послідовності (x_n), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$? Дати геометричну інтерпретацію відповіді.
33. Чи правильне твердження: $a \neq \lim\limits_{n\to\infty} x_n \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \ \forall N = N(\varepsilon)\ \ \exists n > N : |x_n - a| \geq \varepsilon$.
34. Чи правильне твердження: кожна підпослідовність розбіжної послідовності дійсних чисел є розбіжною?
35. Без таблиць і калькулятора знайти наближене значення 2004-го члена послідовності (x_n), де $x_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^n$.
36. Чи правильне твердження: якщо послідовність розбіжна, то вона необмежена?
37. Чи правильне твердження: якщо $(|a_n|)$ – нескінченно мала послідовність, то й (a_n) теж нескінченно мала послідовність?
38. Чи правильне твердження: якщо $(|a_n|)$ – збігається, то послідовність (a_n) також збігається?
39. Чи правильне твердження: якщо послідовність необмежена, то кожна її підпослідовність також необмежена?
40. Чи правильне твердження: якщо послідовність необмежена, то вона є нескінченно великою?

41. Чи правильне твердження: якщо в будь-якому околі точки a міститься безліч членів послідовності (x_n), то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

42. Чи правильне твердження: якщо існує границя суми двох послідовностей, то існує границя кожної з послідовностей-доданків?

43. Яка з функцій не має границі в точці $x_0 = 0$: 1) $f(x)=x$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2}{x}$;

 3) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$; 4) $f(x)=\dfrac{x}{x^2}$?

44. Для яких із даних функцій критичні точки не є стаціонарними, не є точками екстремуму:

 1) $f(x)=x^2+1$; 2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$; 3) $f(x)=2x-1$;

 4) $f(x)=x^4-x^2$; 5) $f(x)=|x|$?

45. Доповніть речення так, щоб воно стало істинним висловленням: якщо x_0 – точка екстремуму функції, то в цій точці її похідна…

46. Для якої з даних функцій пряма $3x-y-2=0$ є дотичною до її графіка в точці (1; 1): а) $f(x)=\dfrac{1}{x}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$;

 в) $f(x)=x^3$; г) $f(x)=x^2$?

47. Чи правильне твердження: кожна функція, неперервна на відрізку $[a;b]$, має точки локального екстремуму?

48. Чи правильне твердження: якщо функція, неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона має на ньому точки глобального екстремуму?

49. Навести приклад функції, областю визначення якої є вся числова пряма і яка не має похідної тільки в двох точках.

50. Чи правильне твердження: для будь-якого $x\in[-1;1]$ справджується рівність $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$? Відповідь обґрунтувати.

51. Чи є диференційовними в кожній точці числової прямої дані функції:

 а) $y=|x|\sin x$; б) $y=x|\sin x|$; в) $y=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0. \end{cases}$

52. Скільки дійсних коренів мають задані рівняння:

 а) $x^3+3x-7=0$ на $\mathbf{R}$; б) $x^3-2x-2=0$ на $[1;2]$;

 в) $7^x-3\cdot 2^x+1=0$ на $[0;\,2]$; г) $x+\sin x=0$ на $\mathbf{R}$.

53. Точка x_0 є критичною точкою функції $y=f(x)$. При переході через точку x_0 похідна $f'(x)$ змінює знак. Чи можна стверджувати, що тоді x_0 є точкою екстремуму функції $y=f(x)$?

54. Точка x_0 є критичною точкою функції $y = f(x)$. При переході через точку x_0 похідна не змінює свій знак. Чи можна стверджувати, що тоді x_0 не є точкою екстремуму функції $y = f(x)$?
55. Чи правильне твердження: якщо функція $y = f(x)$ – зростаюча на $(a;b)$, то $f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a;b)$?
56. Чи правильне твердження: якщо функція обмежена на $\left[a;b\right]$, то вона інтегровна за Ріманом на $\left[a;b\right]$?
57. Чи правильне твердження: якщо $f + \varphi$ — інтегровна функція на $\left[a;b\right]$, то f і φ — інтегровні на $\left[a;b\right]$?
58. Якщо $f + \varphi$ і $f - \varphi$ — інтегровні функції на $\left[a;b\right]$, то f і φ — інтегровні на $\left[a;b\right]$. Чи правильне це твердження ?
59. Чи правильне твердження: будь-яка неперервна на відрізку функція має первісну?
60. Чи правильне твердження: якщо функція $f(x)$ необмежена на відрізку [a; b], то вона не є інтегровною на цьому відрізку?
61. Відомо, що $f'\left(\sin^2 x\right) = \cos 2x + \operatorname{tg}^2 x$. Знайти $f(x)$ при $0 < x < 1$.
62. Чи правильне твердження: якщо $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$, то $f(x) = 0$ на $\left[a;b\right]$.
63. Чи правильне твердження: якщо $\int\limits_a^b f(x)dx < \int\limits_a^b \varphi(x)dx$, то $f(x) < \varphi(x)$ на $\left[a;b\right]$?
64. Чи правильне твердження: якщо $\int\limits_a^b f(x) = 0$, то $f(x) \equiv 0$ на $[a;b]$?
65. Знайти інтеграл без використання формули Ньютона – Лейбніца

а) $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$; б) $\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}\,dx,\ a > 0$; в) $\int\limits_{-1}^{2} \left\|x\right| - 1\right| dx$; г) $\int\limits_{-1}^{1} \arccos x dx$;

д) $\int\limits_0^{\sqrt{2}/2} \arcsin x dx$.

66. Визначити всі значення $a,\ a > 0$, для кожного з яких:

а) $\int\limits_{-a}^{a} e^x dx > \dfrac{3}{2}$; б) $\int\limits_1^2 \left(a^2 - (4-4a)x + 4x^3\right)dx \le 12$.

67. Яке з чисел більше: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$ або $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{10} x dx$?

68. Довести, що

а) $\dfrac{\pi}{2} < \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx < \dfrac{5\pi}{8}$; б) $\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{2}} < \int\limits_0^1 \dfrac{x^n dx}{\sqrt{1+x}} < \dfrac{1}{n+1},\ n \in N$;

в) $\cos x \ge 1 - \dfrac{x^2}{2},\ x \ge 0$; г) $\cos x \le 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24},\ x \ge 0$;

д) $\operatorname{tg} x+\sin x \geq 2x,\ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$; е) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}>\ln n,\ n \in N$.

69. Обчислити $\int\limits_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}}\left(x^{10}\sin 3x+\cos\frac{x}{3}+\operatorname{tg}^{11} x\right)dx$.

70. Чи правильне твердження: для будь-якої неперервної на відрізку $[0;1]$ функції $y=f(t)$ має місце рівність $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx$?

71. Побудувати ряд, у якого послідовність $\left(\frac{(2n+1)(n+1)n}{6}\right)$ є послідовністю часткових сум.

72. Визначити, які із даних рядів є розбіжними:

а) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\ldots+\frac{2n+1}{2n+2}+\ldots$; б) $\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{6}{27}+\ldots+\frac{2n}{3^n}+\ldots$;

в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+i\frac{(-1)^n}{n}$; г) $\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}i\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{4}i\right)+\left(\frac{1}{27}-\frac{1}{8}i\right)+\ldots$.

73. Чи правильне означення: функція $z=z(x,y)$ називається неперервною в точці $(x_0;y_0)$, якщо:

а) $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} z(x,y)=0$; б) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\Delta z(x_0,y_0)=0$; в) $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} z(x,y)=z(x_0,y_0)$;

г) $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z(x_0,y_0)=0$; д) $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta_x z(x_0,y_0)=0$ і $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta_y z(x_0,y_0)=0$.

74. Чи правильне твердження: функція $z=f(x;y)$ називається диференційовною в точці $(x_0;y_0)$, якщо існують $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0;y_0)$ і $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0;y_0)$? Чи буде за цієї умови функція неперервною?

75. Чи правильне твердження: функція $z=f(x;y)$ називається диференційовною в точці $(x_0;y_0)$, якщо:

а) існують скінченні $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z(x_0,y_0)}{\Delta x}$, $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z(x_0,y_0)}{\Delta y}$;

б) $\Delta z(x_0;y_0)=A(x_0;y_0)\Delta x+B(x_0;y_0)\Delta y+\alpha(x_0;y_0;\Delta x;\Delta y)\Delta x+\beta(x_0;y_0;\Delta x;\Delta y)\Delta y$, де $\alpha(x_0;y_0;\Delta x;\Delta y)$, $\beta(x_0;y_0;\Delta x;\Delta y)$ – обмежені;

в) $\Delta z(x_0;y_0)=A(x_0;y_0)\Delta x+B(x_0;y_0)\Delta y+\alpha(x_0;y_0;\Delta x;\Delta y)\Delta x+\beta(x_0;y_0;\Delta x;\Delta y)\Delta y$, де $\alpha,\ \beta$ – нескінченно малі функції при $\Delta x,\Delta y\to 0$?

76. Чи правильне твердження:

а) функція $z = f(x;y)$ – неперервна в точці $(x_0;y_0)$, якщо вона в цій точці диференційовна;

б) функція $z = f(x;y)$ – диференційовна в точці $(x_0;y_0)$, якщо вона в цій точці неперервна?

77. Чи правильно при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0$, що:

а) $\Delta z(x_0;y_0) \approx \frac{\partial z}{\partial x}(x_0;y_0)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0;y_0)\Delta y$;

б) $z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx dz(x_0;y_0)$;

в) $dz(x_0;y_0) \approx \Delta z(x_0;y_0)$;

г) $z(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) \approx dz(x_0;y_0) + \frac{\partial z}{\partial x}(x_0;y_0)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0;y_0)\Delta y$?

78. Нехай $u = u(x,y,z),\ x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$. Знайти $\frac{du}{dt}$.

79. Нехай $f = f(x,y,z),\ x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v)$. Знайти $\frac{\partial f}{\partial u}$, $\frac{\partial f}{\partial v}$.

80. Нехай $u = u(t),\ t = t(x,y,z)$. Знайти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

81. Чи можна вважати поняття похідної за напрямом функції багатьох змінних в точці узагальненням поняття частинної похідної в точці? Відповідь пояснити.
82. Чи може точка екстремуму функції багатьох змінних:

а) не бути критичною точкою цієї функції;

б) не бути стаціонарною точкою цієї функції?

83. Чи правильне твердження: формули переходу до полярних координат $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ задають взаємно однозначне відображення множини $E = \{(\rho,\varphi):$ $0 \le \rho < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}$ на простір $\mathbf{R}^2$?
84. Що є образом паралелепіпеда $\Pi = \{(\rho,\varphi,z): 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ 0 \le z \le 1\}$ при відображенні $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$? Чи буде це відображення взаємно однозначним?
85. Що є образом паралелепіпеда $\Pi = \left\{(\rho,\theta,\varphi): 0 \le \rho \le 2,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2},\ 0 \le \varphi \le \pi\right\}$ при відображенні $x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta$? Чи буде це відображення взаємно однозначним?
86. Чи може подвійний інтеграл від функції $z = f(x;y)$ по області $\overline{D} = \{(x;y): a_1 \le x \le b_1,\ a_2 \le y \le b_2\}$ дорівнювати добутку двох визначених інтегралів по кожній змінній x і y окремо?
87. Чи кожна неперервна у відкритій квадровній області функція буде інтегровною в цій області?
88. Чи кожний криволінійний інтеграл першого роду можна вважати деяким визначеним інтегралом?
89. Чи залежить від напрямку обходу кривої:

1.а) криволінійний інтеграл першого роду;

б) яка-небудь інтегральна сума для інтеграла першого роду;

2.а) криволінійний інтеграл другого роду;

б) яка-небудь інтегральна сума для інтеграла другого роду?

90. Перевірити правильність твердження: рівняння $e^t = -1$ не має жодного розв'язку.

91. Знайти помилку в міркуваннях: “Очевидно, що $i^{21} = \left(i^4\right)^{\frac{21}{4}} = 1^{\frac{21}{4}} = 1$, інакше $i^{21} = \left(i^4\right)^5 \cdot i = 1^5 \cdot i = i$. Отже, $i = 1$”.

92. Чи правильне твердження: рівняння $\sin z = 2$ не має коренів?

93. Побудувати графік функції:

а) $y = \left|\exp(ix)\right|$; б) $y = \left|1 + \exp(ix)\right|$.

94. В яких точках площини функція $\varpi = \cos z$ приймає суто уявні значення?

95. Обчислити $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{1+i}$.

96. Знайти (обчислити) суму $S = 1 + c_n^1 \cos\alpha + c_n^2 \cos 2\alpha + \ldots + c_n^n \cos n\alpha$.

97. Зобразити множину точок комплексної площини, заданих рівняннями та нерівностями:

а) $\left|\dfrac{z-1}{z+3}\right| = 1$; б) $|z-2| + |z+2| = 1$; в) $2\operatorname{Re} z + |z|^2 \ge 2$; г) $|z-i| + |z+i| \ge 4$.

98. В яких точках комплексної площини функція $w = f(z) = z|z|^2$ має похідну? Чи є дана функція аналітичною в цих точках?

99. Чи правильне твердження: на множині дійсних чисел можна визначити відстань між точками за формулою $\rho(x, y) = \sin^2(x - y)$?

100. Чи правильне твердження: послідовність (x_n) є збіжною в метричному просторі (M, ρ) до x, якщо $\exists \varepsilon > 0\ \exists N = N(\varepsilon): \forall_n > N \Rightarrow \rho(x_n, x) < \varepsilon$?

101. Чи правильне твердження: послідовність (x_n) є збіжною в метричному просторі (M, ρ) до x, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \ \forall N = N(\varepsilon)$: $\exists n > N \Rightarrow \rho(x_n, x) < \varepsilon$?

102. Чи правильне твердження: кожна збіжна послідовність простору R^1 монотонна і обмежена ?

103. Чи правильне твердження: якщо (x_n) – збіжна послідовність у метричному просторі, то вона фундаментальна? Чи правильне обернене твердження?

104. Виясняти, чи є збіжними задані послідовності у відповідних метричних просторах. Знайти границю у випадку збіжності послідовності:

1) $x_n = \left(1998^{\frac{1999}{n}}, \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n, \dfrac{n\sqrt{2n+3}}{\sqrt{n^2+1}}\right)$ в $\mathbf{R}^3$;

2) $x_n = \left(n\sin\frac{1}{n}, \left(\frac{2n+3}{2n-4}\right)^{2n+1}, \sqrt[2n]{6}, \frac{1000n}{n^2+1}\cos\left(n^2+1\right) \right)$ в $\mathbf{R}^4$;

3) $z_n = \frac{3\lg n}{n^3} + i\frac{\sin n^2}{n}$ в **C**; 4) $z_n = \left(\frac{1}{\sqrt{3}+i}\right)^n$ в **C.**

105. У просторі $C[0;1]$ знайти відстань між функціями:

1) $x(t) = t^2, y(t) = \ln(t+1)$; 2) $x(t) = t^2+1, y(t) = t-1$.

106. Чи правильне твердження: оскільки $N \subset Z \subset Q$, то множина Q має більшу кількість елементів, ніж Z (а Z більшу, ніж N)?

107. Чи правильне твердження: множина раціональних точок з відрізка $[a;b]$ вимірна за Жорданом ?

108. Чи правильне твердження: множина ірраціональних точок з відрізка $[a;b]$ вимірна за Лебегом ?

109. Чи правильне твердження: якщо функція інтегрована за Лебегом на $[a;b]$, то вона інтегрована і за Ріманом на $[a;b]$?

110. Зобразити на декартовій площині інтегральну криву диференціального рівняння $xy' - y\ln y = 0$, що проходить через точку $\mathrm{M}\left(\frac{1}{3};e\right)$.

111. Чи правильне твердження: диференціальне рівняння $xdy + ydx = xydx + dy$ є рівнянням з відокремлюваними змінними, лінійним, однорідним і в повних диференціалах.

112. Чи правильне твердження $y = e^x \sin e$ є розв'язком диференціального рівняння $y' = y$?

113. Знайти геометричне місце стаціонарних точок для інтегральних кривих диференціального рівняння $y' = x - 4y^2 + 6$.

114. Чи правильні твердження:

а) загальний вигляд звичайного диференціального рівняння другого порядку має вигляд $y'' + y' = F(x;y)$;

б) загальний розв’язок звичайного диференціального рівняння другого порядку $y = F(x, C_1, C_2)$, де C_1, C_2 – довільні сталі.

115. Знайти інтегральну криву рівняння $y'' + 9y = 0$, яка проходить через точку $M(\pi;-1)$ і дотикається в цій точці до прямої $y + 1 = x - \pi$.

5. Для пільгових категорій осіб, яким надано право складати вступні випробування (особи, що потребують особливих умов складання випробувань) в НПУ імені М. П. Драгоманова за рішенням Приймальної комісії створюються особливі умови для проходження вступних випробувань.

6. СТРУКТУРА БІЛЕТУ ДОДАТКОВОГО ВСТУПНОГО ВИПРОБУВАННЯ (СПІВБЕСІДИ)

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Фізико-математичний факультет

Ступінь: *магістр*
Галузь знань: *11 Математика і статистика* **Додаткове вступне**
Спеціальність: *111 Математика* **випробування**
На базі ступеня/ОКР: *бакалавр, спеціаліст*

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 1

1. Відношення еквівалентності. Теорема про зв'язок між відношенням еквівалентності на множині і розбиттям множини на класи.
2. Теореми про геометричний зміст лінійних нерівностей з двома і трьома змінними.
3. Умовні ймовірності. Попарна незалежність подій та незалежність подій в сукупності. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.
4. **Методологія і методи педагогічних досліджень.** Методологічні принципи педагогічних досліджень. Організація педагогічного дослідження. Система методів, і методика проведення педагогічного дослідження під час навчання математики в основній школі.
5. Зобразити на декартовій площині інтегральну криву диференціального рівняння $xy' - y\ln y = 0$, що проходить через точку M$\left(\frac{1}{3}; e\right)$.

Затверджено на засіданні Приймальної комісії НПУ імені М. П. Драгоманова

Протокол № 5 від «18» лютого 2019 р.

***Голова фахової комісії*________ / ___________________________________ /**
Підпис Прізвище, ім'я, по-батькові

7. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Література з алгебри і теорії чисел

1. *Завало С.Т.* Курс алгебри. — К.: Вища школа. — 1985. — 396с.
2. *Завало С.Т., Костарчук В.Н., Хацет Б.И.* Алгебра и теория чисел. Ч.І. — К.: Вища школа, 1977. — 400с.
3. *Завало С.Т., Костарчук В.Н., Хацет Б.И.* Алгебра і теорія чисел. Ч.ІІ. — К.: Вища школа, 1986. — 408с.
4. *Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокицький І.О.* Алгебра і теорія чисел. Практикум. Ч.І. — К.: Вища школа, 1983. — 232с.
5. *Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокицький І.О.* Алгебра і теорія чисел. Практикум. Ч.ІІ. — К.: Вища школа, 1986. — 264с.
6. *Куликов Л.Я.* Алгебра и теория чисел. — М.: Высшая школа, 1979. — 559с.
7. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1971. — 432с.

8. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Наука, 1974. — 384с.
9. *Требенко Д.Я., Требенко О.О.* Алгебра і теорія чисел: У 2 ч. - К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2009. - Ч.1. - 420 с.
10. *Фадеев Д.К., Соминский И.С.* Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Наука, 1977. – – 288с.

Література з геометрії

1. *Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю.* Геометрия: Учебное пособие. — М.: Наука, 1990. — 672с.
2. *Атанасян Л.С.* Геометрия. Ч. І. — М.: Просвещение, 1973. — 456с.
3. *Атанасян Л.С., Атанасян В.А.* Сборник задач по геометрии. Ч. І. – М.: Просвещение, 1973. — 256с.
4. *Атанасян Л.С., Базылев В.Т.* Геометрия. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. В 2 ч. Ч. І. — М.: Просвещение, 1986. – 336с.
5. *Атанасян Л.С., Базылев В.Т.* Геометрия. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. В 2 ч. Ч. ІІ. — М.: Просвещение, 1987. – 352с.
6. *Атанасян Л.С., Гуревич Г.Б.* Геометрия. Ч. ІІ. — М.: Просвещение, 1976. — 447с.
7. *Базылев В.Т., Дуничев К.И.* Геометрия. Ч.І. — М.: Просвещение, 1974. — 351с.
8. *Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П.* Геометрия. Ч.І. — М.: Просвещение, 1974. — 351с.
9. *Білоусова В.П., Ільїн І.Г., Сергунова О.П., Котлова В.М.* Аналітична геометрія. — К.: Вища школа, 1973. — 328с.
10. *Вернер А.Л., Кантор В.Е.* Элементы топологии и дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1985. — 112с.
11. *Егоров И.П.* Геометрия. — М.: Просвещение, 1969. — 368с.
12. *Клетенник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1968. – – 224с.
13. *Погорелов А.В.* Геометрия: Учебное пособие для вузов. — М.: Наука, 1984. — 288с.
14. *Працьовитий М.В.* Екзамен з аналітичної геометрії (І семестр). — К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2005.— 120с.
15. *Працьовитий М.В.* Екзамен з аналітичної геометрії (ІІ семестр). — К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2005.— 60с.
16. *Працьовитий М.В.* Аналітична геометрія. Теорія прямих на площині в аналітичному вигляді. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2011. – 80 с.
17. *Працьовитий М.В.* Векторна алгебра. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2011. – 144 с.
18. *Працьовитий М.*В. Геометричні перетворення. — К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2010. — 128с.
19. *Працьовитий М.В.* Екзамен з аналітичної геометрії (І семестр). — К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2004. — 92 с.
20. *Саранцев Г.И.* Сборник задач на геометрические преобразования. — М.: Просвещение, 1975. — 110с.
21. *Сергунова О.П., Котлова В.М.* Практикум з проективної геометрії. — М.: Вища школа, 1971. — 188с.

22. *Трайнин Я.Л.* Основания геометрии. — М.: Учпедгиз, 1969. — 325с.
23. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1968. — 336с.

Література з математичного аналізу

1. *Давидов М.О.* Курс математичного аналізу. Ч.1–3. — К.:Вища школа, 1990, 1991, 1992.— 384, 392, 360с.
2. *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. Т.1-2. — М.: Высшая школа, 1993.— 614с., 472с.
3. *Шкіль М.І.* Математичний аналіз. Ч.1–2. — К.:Вища школа, 1994. — 424с., 430с.
4. *Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М.* Вища математика. Кн. 1. — К.: Либідь, 1994.— 279с.
5. *Шкіль М.І., Колесник Т.В.* Вища математика . Кн. 2.— К.: Либідь, 1994. — 351с.
6. *Шкіль М.І., Колесник Т.В.* Вища математика . Кн. 3.— К.: Либідь, 1994. — 351с.
7. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. — М.:Наука, 1985. — 383с.
8. *Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н.* Сборник задач по математическому анализу. — М.:Просвещение, 1973. — 254с.