МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ М. П. ДРАГОМАНОВА

Фізико-математичний факультет

“Затверджено”
На засіданні Приймальної комісії
НПУ імені М. П. Драгоманова
Протокол № 8 від «28» березня 2016р.

“Рекомендовано”
Вченою радою Фізико-математичного факультету
Протокол №6від «23» березня 2016р.

Програма вступного фахового випробування (співбесіди)

з математики та методики навчання математики

для громадян України, іноземних громадян та осіб без громадянства, при вступі на навчання для здобуття освітньо-кваліфікаційного рівня

магістр

на базі здобутого ступеня бакалавра / освітньо-кваліфікаційного рівня спеціаліста

спеціальність **111 Математика**

Київ - 2016

1. ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА ВСТУПНОГО ФАХОВОГО ВИПРОБУВАННЯ (СПІВБЕСІДИ)

Метою вступного фахового випробування з математики та методики навчання математики є контроль рівня загальної математичної культури і перевірка фактичних знань, умінь та навичок з фундаментальних розділів математики та методики навчання математики, які є базовими для успішного продовження навчання для досягнення освітньо-кваліфікаційних рівнів «магістр» та «спеціаліст» спеціальності «МАТЕМАТИКА».

Програма екзамену містить основні і найбільш важливі в ідейно-теоретичному і практичному відношенні питання з курсів лінійної алгебри, алгебри і теорії чисел, аналітичної і диференціальної геометрій, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, комплексного аналізу, теорії ймовірностей і математичної статистики, методики навчання математики, методології математики.

На іспиті студент повинен продемонструвати вміння формулювати означення, аксіоми і теореми, наслідки з них, наводити при необхідності ілюстрації, приклади, контрприклади, доводити теореми і застосовувати відповідні факти при розв'язуванні конкретних математичних та прикладних задач. Студент має показати глибоке володіння аксіоматичним методом, вміння аналітично мислити та розв’язувати задачі з використанням синтетичних та штучних прийомів.

Екзаменовані повинні володіти теоретико-множинною і логічною символікою, основними поняттями алгебри і теорії чисел (алгебраїчна операція, група, кільце, поле, векторний простір, лінійна залежність і лінійна незалежність, базис і розмірність простору, лінійні оператори, матриці і визначники, прості числа, подільність, конгруенції, многочлени та інше); мати чітке уявлення про основні числові системи і їх будову, володіти навичками розв'язування систем лінійних рівнянь, знати основні арифметичні застосування теорії конгруенцій тощо.

Екзаменовані мають володіти як груповою, так і структурною точками зору на геометрію, сучасним аксіоматичним методом, основними фактами евклідової та неевклідових геометрій; мати загальні уявлення про елементи багатовимірної геометрії афінного і евклідового просторів; вміти застосовувати теоретичні знання на практиці, зокрема, до доведення теорем і розв‘язання задач шкільного курсу геометрії; використовувати знання топології при означенні ліній, поверхонь, поверхонь з межею, геометричного тіла тощо. Це означає, що при відповіді екзаменовані повинні продемонструвати достатньо широкий погляд на геометрію та її методи, а також на елементарну геометрію з точки зору вищої, готовність викладати шкільну геометрію, незалежно від того на якій аксіоматиці вона побудована, тобто готовність працювати в школі за будь-яким посібником (підручником).

Екзаменовані повинні володіти основними поняттями математичного аналізу (функція, послідовність, ряд, границя, неперервність, похідна, інтеграл, міра тощо); мати чітке уявлення про метричний простір та основні елементарні функції дійсної та комплексної змінної; володіти навичками обчислення границь, похідних, інтегралів; вміти розв'язувати найпростіші типи диференціальних рівнянь; знати застосування диференціального та інтегрального числення, а також диференціальних рівнянь до розв'язування практичних задач.

З курсу теорії ймовірностей і математичної статистики абітурієнти мають: *продемонструвати знання* аксіоматичних основ теорії ймовірностей, володіння поняттями «ймовірність події», «ймовірність», «ймовірнісна міра», «ймовірнісний простір», *вміння формулювати* строгі математичні означення випадкової величини та функції розподілу, *визначати* числові характеристики (математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення) для дискретних та неперервно розподілених випадкових величин, *бути знайомими* з схемою Бернуллі, вміти виводити формулу повної ймовірності та формулу Байєса.

Екзаменовані мають володіти знаннями із загальної методики навчання математики в основній школі (методики навчання математики в 5-6 класах, алгебри і геометрії в 7-9 класах), вміти розв’язувати методичні задачі.

Вступне фахове випробування з «Математики та методики навчання математики» проводиться за білетами, кожен з яких містить п’ять завдань:

- **завдання 1** контролює *знання основних фактів теорій* відповідних курсів, здатність їх оперативно відтворювати, *відчувати взаємозв'язок* і органічну єдність понять, фактів та теорій. Зміст цього завдання черпається з розділу 3 “3.1. Математика: Основні факти та теореми”;
- **завдання 2** перевіряє знання студентів з основ методології математики, діагностує їх математичну культуру та кругозір, цілісність розуміння математики як науки, володіння фундаментальними математичними поняттями та математичними структурами, методами та загальними питаннями аксіоматики. Зміст цього завдання черпається з розділу 4 “4.2. Основи методології математики”;
- **завдання 3** контролює знання студентів з загальної методики навчання математики, методики навчання математики в 5-6 класах, алгебри і геометрії в 7-9 класах. Зміст цього завдання черпається з розділу 4 “4.3. Методика навчання математики”;
- **завдання 4** перевіряє здатність оперативно використовувати відомі з фундаментальних курсів *алгоритми* і синтетичним шляхом створювати нові.

До уваги беруться вміння добре оформляти розв'язання задачі, аргументувати логічні кроки і використовувати відповідну символіку. Зразки завдань цього типу представлені в розділі 4 “4.4. Задачі на використання відомих алгоритмів”;

- **завдання 5** контролює вміння розв'язувати *прикладні задачі* (умови яких містять нематематичні поняття) шляхом *створення і дослідження математичних моделей* реальних об’єктів, процесів та явищ. Зразки завдань цього типу представлені в розділі 4 “4.5. Прикладні задачі”.

2. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ ЗНАНЬ АБІТУРІЄНТА НА ВСТУПНОМУ ФАХОВОМУ ВИПРОБУВАННІ

(ТІЛЬКИ ДЛЯ ГРОМАДЯН УКРАЇНИ)

За шкалою університету	***Визначення***	***Характеристика відповідей абітурієнта***	
		на питання теоретичного змісту	***на питання практичного змісту***
100-123 бали	***Низький***	Абітурієнт не усвідомлює змісту питання білету, тому його відповідь не має безпосереднього відношення до поставленого питання. Наявна повна відсутність уміння міркувати.	Обсяг розв'язаних задач < 50%. У абітурієнта відсутня просторова уява, необхідна для розв'язування задачі.
124-149 балів	***Задовільний***	Відповіді на питання білету носять фрагментарний характер, характеризуються відтворенням знань на рівні запам'ятовування. Абітурієнт поверхово володіє умінням міркувати, його відповіді супроводжуються другорядними міркуваннями, які інколи не мають безпосереднього відношення до змісту запитання.	Обсяг розв'язаних задач у межах 50-75%. Абітурієнт погано володіє графічними засобами відтворення просторових властивостей предметів на площині
150-174 балів	***Достатній***	У відповідях на питання білету допускаються деякі неточності або помилки непринципового характеру. Абітурієнт демонструє розуміння навчального матеріалу на	Обсяг правильно розв'язаних задач >75%. Результат розв'язування задачі містить окремі неточності і незначні помилки.

		рівні аналізу властивостей. Помітне прагнення абітурієнта логічно розмірковувати при відповіді на питання білета.	
175-200 балів	***Високий***	Абітурієнт дає повну і розгорнуту відповідь на питання білету. Його відповіді свідчать про розуміння навчального матеріалу на рівні аналізу закономірностей, характеризуються логічністю і послідовністю суджень, без включення випадкових і випадання істотних з них.	Обсяг правильно розв'язаних задач =100%. Кожна розв'язана задача супроводжується ґрунтовним поясненням. Абітурієнт без помилок відтворює просторові властивості предметів на площині

Якщо абітурієнт під час вступного випробування з конкурсного предмету набрав від 100-123 балів, то дана кількість балів вважається не достатньою для допуску в участі у конкурсному відборі до НПУ імені М. П. Драгоманова.

Оцінювання рівня знань абітурієнтів проводиться кожним із членів предметної комісії окремо, відповідно до критеріїв оцінювання. Загальний бал оцінювання рівня знань абітурієнта виводиться за результатами обговорення членами комісії особистих оцінок відповідей абітурієнтів. Бали (оцінки) вступного фахового випробування виголошуються головою предметної комісії усім абітурієнтам, хто приймав участь у випробуванні після закінчення іспиту.

3. КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ СПІВБЕСІДИ

Фахова комісія аналізує результати співбесіди методом експертної оцінки й колегіально приймає рішення: про «рекомендовано до зарахування» або «не рекомендовано до зарахування», з урахуванням співбесіди з мови (української, російської).

4. ЗМІСТ ПРОГРАМИ ФАХОВОГО ВИПРОБУВАННЯ (СПІВБЕСІДИ)

4.1. МАТЕМАТИКА: ОСНОВНІ ФАКТИ ТА ТЕОРЕМИ

4.1. 1. Алгебра і теорія чисел

1. Групи та їх підгрупи. Фактор-групи. Суміжні класи і теорема Лагранжа.
2. Гомоморфізми та ізоморфізми алгебраїчних структур.
3. Конгруенції. Їх властивості та застосування. Лінійні конгруенції з одним невідомим.
4. Розв’язність алгебраїчних рівнянь n-го степеня в радикалах.
5. Многочлени над числовими полями: **C**, **R**, **Q** (звідність та незвідність, канонічна форма).Основна теорема алгебри.
6. Корені многочлена (існування, кількість, кратність). Теорема Безу.
7. Системи лінійних однорідних рівнянь, існування ненульового розв’язку.

8. Система трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими. Методи її розв'язання.
9. Числові функції. Число і сума натуральних дільників. Ціла і дробова частини дійсного числа. Функція Ейлера.
10. Лінійні оператори. Власні значення та власні вектори. Інваріантні підпростори.

4.1.2. Геометрія

1. Векторний добуток векторів, його властивості та застосування.
2. Метод координат на площині. Полярна система координат. Пряма, коло, еліпс, гіпербола та парабола в полярних координатах.
3. Оптична властивість параболоїда обертання та її застосування.
4. Теорема про геометричний зміст лінійної нерівності з двома змінними.
5. Основна теорема про рухи площини та її застосування. Аналітичний вираз рухів і їх класифікації.
6. Алгебраїчний метод розв'язання задач на побудову. Критерій розв'язності задачі на побудову циркулем та лінійкою. Класичні задачі на побудову, які не розв'язуються за допомогою циркуля та лінійки.
7. Натуральні рівняння гладкої кривої та їх роль.
8. Аксіома Лобачевского, кут паралельності, функція Лобачевского. Сума кутів трикутника на площині Лобачевского.
9. Класифікація правильних многогранників в R^3. Теорема Ейлера.
10. Неперервні відображення топологічних просторів. Критерій неперервності відображення.

4.1.3. Математичний аналіз

1. Теорема про існування точної верхньої (точної нижньої) межі множини.
2. Зчисленні множини. Теорема про існування незчисленних множин. Множини потужності континуум.
3. Перша і друга важливі границі.
4. Теорема Кантора про зв'язок рівномірної неперервності функції з неперервністю.
5. Екстремуми функції однієї змінної. Необхідна умова екстремуму. Достатні умови екстремуму.
6. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею інтегрування. Формула Ньютона-Лейбніца.
7. Диференційовність функції багатьох змінних. Достатня умова диференційовності функції.
8. Знакозмінні ряди. Теорема Лейбніца. Абсолютно та умовно збіжні числові ряди.
9. Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.
10. Інтеграл від функції комплексної змінної. Інтегральна теорема Коші.
11. Повнота метричних просторів $R, R^n, C, C[a;b]$.
12. Компактні множини в метричному просторі. Критерій компактності множини в просторах R^n або C.

13. Теорема Банаха про нерухому точку стискуючого відображення та її застосування.
14. Різні означення аналітичної функції та їх еквівалентність.
15. Теореми про структуру загального розв’язку лінійного однорідного та неоднорідного рівняння вищого порядку.

4.1.4. Теорія ймовірностей

1. Формули ймовірності суми та добутку двох подій.
2. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.
3. Формула для найбільш ймовірного числа появ події A в серії з n незалежних випробувань.
4. Випадкова величина, її розподіл, функція розподілу випадкової величини та її властивості.
5. Числові характеристики розподілу випадкових величин та їх властивості.

4.2. ОСНОВИ МЕТОДОЛОГІЇ МАТЕМАТИКИ

1. Множина. Операції над множинами. Класи множин.
2. Відношення, їх властивості. Бінарне відношення еквівалентності.
3. Операції та їх властивості. Унарні операції, бінарні, алгебраїчні операції, тернарні операції. Декартів добуток множин, векторна (арифметична) сума числових множин.
4. Взаємнообернені операції у математиці.
5. Алгебраїчні структури.
6. Натуральні числа. Прості та складені числа, подільність, конгруенції.
7. Аксіома індукції. Принцип математичної індукції (перша та друга форма). Метод математичної індукції.
8. Арифметика цілих чисел. Основна теорема арифметики.
9. Число. Числові системи. Теорія дійсних чисел.
10. Аксіоми Архімеда, Кантора, Дедекінда.
11. Комплексні числа.
12. Лінія (крива), поверхня, тіло.
13. Геометричні перетворення. Груповий погляд на геометрію.
14. Величина, скалярні та векторні величини. Лінійний простір, його базис та розмірність.
15. Величина, геометричні величини. Теорії вимірювання геометричних величин (довжин відрізків, площ многокутників, об’ємів многогранників).
16. Метричні та топологічні простори. Взаємозв’язок між ними.
17. Математичні поняття, їх означення. Терміни та символіка.
18. Математичні твердження. Аксіоми та теореми, їх місце і роль в теорії.
19. Теореми існування та методи їх доведення.
20. Метод доведення від супротивного.
21. Аксіоматичний метод побудови математичної теорії. Вимоги до системи аксіом та їх перевірка.
22. Функція. Способи задання функції, властивості функцій. Елементарні функції.
23. Нулі функції, їх існування.

24. Грані числових множин. Найбільші та найменші значення функції.
25. Метод інтервалів розв'язання нерівностей.
26. Ймовірність випадкової події, ймовірність (ймовірнісна міра), ймовірнісний простір.
27. Комбінаторика.
28. Оператори і функціонали.
29. Числові послідовності та числові ряди.
30. Ознаки та критерії, приклади та контрприклади в математиці.

4.3. МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ

1. Цілі навчання математики в основній школі. Ієрархія цілей. Цілі навчання окремих предметів: геометрії, алгебри.
2. Змістові лінії шкільного курсу алгебри та їх характеристика.
3. Змістові лінії шкільного курсу планіметрії та їх характеристика.
4. Державний стандарт середньої освіти, освітня галузь „Математика", його зміст і призначення.
5. Загальнодидактичні принципи навчання математики, принципи розвивального навчання.
6. Рівнева і профільна диференціація навчання як сучасні принципи навчання математики.
7. Система методів навчання математики в основній школі, їх суть і порівняльна характеристика.
8. Система засобів навчання математики в основній школі, їх суть і порівняльна характеристика.
9. Основні форми навчання математики в основній школі, їх суть і порівняльна характеристика.
10. Основні форми позакласної роботи в школі, їх порівняльна характеристика, приклади застосування у навчанні.
11. Система контролю навчальних досягнень учнів з математики.
12. Загальні і специфічні дії і прийоми розумової діяльності під час навчання математики.
13. Означувані математичні поняття. Види означень, приклади.
14. Теореми як математичні твердження. Види теорем, різні формулювання. Приклади.
15. Теорема, обернена до теореми Піфагора, і її доведення.
16. Теорема, обернена до теореми Вієта, і її доведення.
17. Задача на побудову. Основні методи розв'язування задач на побудову, їх суть і коротка характеристика.
18. Рух. Рухи в шкільному курсі планіметрії, їх суть і коротка характеристика.
19. Поняття вектора в математиці. Формування поняття вектора в шкільному курсі планіметрії.
20. Суть векторного методу розв'язування геометричних задач. Приклади застосування.
21. Поняття координат в математиці. Координатний метод розв'язування математичних задач. Приклади застосування.

22. Натуральне число. Методика формування поняття натурального числа в основній школі.
23. Алгебраїчний вираз. Вирази в шкільному курсі алгебри і методика їх формування.
24. Формування поняття раціонального числа в курсі математики 5-6 класів.
25. Рівняння як фундаментальне поняття математики. Види рівнянь в курсі алгебри основної школи та методи і способи їх розв'язування.
26. Поняття функції в математиці. Функції в шкільному курсі математики, методика їх вивчення.
27. Площа як функція, задана на множенні квадровних фігур. Вивчення площ многокутників в курсі планіметрії.
28. Геометрична фігура як фундаментальне поняття математики, рівність і подібність фігур. Ознаки рівності трикутників і їх доведення в шкільному курсі геометрії.
29. Дійсне число. Методика вивчення дійсних чисел і дій над ними в основній школі.
30. Ймовірність випадкової події. Вивчення елементів стохастики в основній школі.

4.4. ЗАДАЧІ НА ВИКОРИСТАННЯ ВІДОМИХ АЛГОРИТМІВ

1. Обчислити об'єм тіла обертання, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = xe^{\frac{x}{2}}$, віссю Ox, прямими $x = a$ і $x = b$, де a — ранг не виродженої матриці $A = \begin{pmatrix} u & 1-u \\ 1-u & u \end{pmatrix}$; b — дисперсія випадкової величини, рівномірно розподіленої на $[0,1]$.
2. Обчислити інтеграл $\int_a^b xe^{-x^2}dx$, де a — найбільша довжина вектора $\vec{x} = (x;1-x)$, координати якого в ПДСК є невід'ємними; b — сума квадратів координат точки перетину трьох площин $\pi_1:\ x + 2y - 3z - 5 = 0$, $\pi_2:\ 2x - y + z - 3 = 0$, $\pi_3: x + 3y - 2z - 4 = 0$.
3. Знайти градієнт функції $Z = f(x,y,z) = y^2z - 2xyz + z^2$ в точці перетину трьох площин $\pi_1: 5x + 8y - z - 7 = 0$, $\pi_2: x + 2y + 3z - 1 = 0$ і π_3, яка проходить через точки $A(4{,}5;0;0)$, $B(0;-3;0)$, $C(0;0;4{,}5)$.
4. Написати рівняння дотичної площини до еліпсоїда $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1$ в точках його перетину прямою, спільною для двох площин: $\pi_1: x - y = 0$, $\pi_2: y - z = 0$.
5. Довжини сторін прямокутника дорівнюють координатам точки перегину графіка функції $y = (x-3)^3 + 4$. Чи можна на його суміжних сторонах побудувати прямокутники з цілочисельними сторонами так, щоб сума їх площ дорівнювала площі початкового прямокутника?

6. Знайти відстань від точки $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$, де x_1 — точка екстремуму функції $f\left(x\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$, до прямої $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$, якщо $a=\text{НСД}\left(159{,}234\right)$, b — остача від ділення числа 2^{112} на 7.
7. До кривої $y=x^2+\ln(x-1)$ проведено дотичну в точці $\left(x_0, y_0\right)$, де x_0 – раціональний нуль многочлена $f(x)=x^3-x^2-x-2.$ Знайти кут між цією дотичною і прямою $2x-3y+21=0$.
8. Знайти найбільше і найменше значення функції $f\left(x\right)=\dfrac{4x^3-1}{x}$ на відрізку $\left[a;b\right]$, де a *і* b — раціональні корені многочлена $q\left(x\right)=x^4-2x^3+x-2$. Визначити в якому відношенні ділить точка екстремуму функції $f\left(x\right)$ відрізок $\left[a;b\right]$.
9. Написати рівняння кола, центр якого знаходиться в точці $\left(f\left(4\right), f'\left(2\right)\right)$, де $f\left(x\right)=x^4-6x^3+11x^2-14x+8$, а радіус є радіусом збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}x^n$. Знайти рівняння прямої, що проходить через центр цього кола і паралельна до прямої $5x+y-7=0$.
10. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y=x^2-5x$, віссю Ox, та прямими $x=a,\ x=b, \left(a<b\right)$, якщо $a+b=12$, $\text{НСД}\left(a,b\right)=2$. Визначити відстань від точки екстремуму даної функції до прямої $y=7x-3$.
11. Знайти раціональні корені a і b $(a<b)$ многочлена $f(x)=x^4-3x^3-7x^2-9x-30$ та обчислити $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Визначити ексцентриситет еліпса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ та рівняння його директрис.
12. Знайти найбільший спільний дільник $\varphi\left(x\right)$ многочленів $f(x)=x^4-3x^3-3x^2+7x+6$, $g(x)=x^4-3x^3-7x^2+15x+18$. Обчислити найбільше і найменше значення функції $y=\varphi\left(x\right)$ на проміжку $\left[a;b\right]$, якщо a і b — відрізки, що відтинає на осях пряма $5x-3y+2=0$.
13. Знайти кратні корені x_1, x_2 $(x_1<x_2)$ многочлена $f(x)=x^5+x^4-9x^3-5x^2+16x+12$. Обчислити $\int\limits_{x_1}^{x_2}\left(kx+b\right)e^x dx$, де $y=kx+b$ — пряма, що проходить через точку $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ паралельно до прямої $2x-3y+5=0$.
14. Побудувати за даним многочленом $f\left(x\right)=x^5+2x^4-3x^3-6x^2-4x-8$ многочлен $g\left(x\right)$ без кратних коренів. Знайти відстань від точки $\left(x_0, g\left(x_0\right)\right)$ до прямої $y=2x+1$, якщо x_0 — точка мінімуму функції $y=g\left(x\right)$.

15. Знайти розв'язок $y = \varphi(x)$ диференціального рівняння $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} + x = 0$, який задовольняє початкову умову $y(1) = 1$. Обчислити відстань від точки $(x_0, \varphi(x_0))$, де x_0 – точка максимуму функції $y = \varphi(x)$, до точки (a, b), якщо a і b $(a < b)$ – раціональні корені многочлена $f(x) = x^4 - x^3 - 5x^2 - x - 6$.

16. Знайти відстань від початку координат до прямої, яка відтинає на осях координат відрізки, довжини яких рівні сумі $1 + 2\varepsilon + 3\varepsilon^2 + ... + 100\varepsilon^{99}$, якщо ε є одним з коренів 100-го степеня з одиниці.

17. Знайти ранг матриці $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & x & 6 \\ -1 & y & z \end{pmatrix}$, де $x = \int_0^{\pi/2} 3 \sin t \cos^2 t \, dt$, y – найменший цілий корінь нерівності $y^3 + 3y^2 - 4y - 12 > 0$, z – розмірність лінійного простору симетричних матриць другого порядку.

18. Знайти кількість дільників числа $A = 2^k \cdot 3^p \cdot 5^l$, де k — розмірність простору симетричних матриць третього порядку, p — ціла частина відстані від точки $B(3;4;-3)$ до поверхні $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 91 = 0$, l — радіус збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3n \cdot 11^n}$.

19. Знайти об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}(1;2;0)$, $\vec{b}(2;3;R)$, $\vec{c}(y;3;4)$, де R – радіус збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}$, y — найменший додатний розв'язок конгруенції $3y \equiv 2 \pmod 7$.

20. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} x & 2 & 3 \\ 4 & y & 6 \\ 2 & 1 & z \end{vmatrix}$, де x — розмірність простору діагональних матриць третього порядку, y — найменше значення функції $y = x^2 + 6x + 7$, z — модуль векторного добутку векторів $\vec{a}(1;2;3)$ та $\vec{b}(2;4;6)$.

21. Обчислити інтеграл $\int \frac{Ax + B}{x^2 + 5x + 6} dx$, де $A = f(4)$, $f(x)$ — найменше спільне кратне многочленів $x^2 - 5x + 6$ та $x^2 + x - 6$, B — довжина відрізка, що сполучає початок координат з центром поверхні $x^2 + y^2 - z^2 - 4x + 4y + 2z + 6 = 0$.

22. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $A(1;2;x)$ і перпендикулярна до площини π, якщо x — загальна кількість натуральних дільників числа 3300, а π — дотична площина до поверхні $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+4)^2 = 16$ в точці $B(2;-1;-4)$.

23. Чи утворює повний клас лишків за модулем 7 множина $M = \{6;9;17;4;a;b;c\}$, де $a = ln\left(\lim\limits_{x \to 0} (1 + tgx)^{ctgx}\right)$, b — скалярний добуток вектора нормалі площини

$x+2y-7z+5=0$ та одиничного вектора, що задає напрям осі циліндра $x^2+y^2=25$, $c=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5}{2^n}$.

24.Написати рівняння діаметральної площини поверхні $x^2+2x+y^2-z^2+2z=0$ при умові, що її вектором нормалі є вектор $\vec{n}(n_1,n_2,n_3)$, де n_1 — найменший додатний корінь рівняння $x^3+2x^2-5x-6=0$, n_2 — радіус збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2n}$, $n_3=ln\left(\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{2n}\right)^n\right)$.

25.Розв’язати конгруенцію $5x\equiv n(\operatorname{mod} m)$, де m — ціла частина відстані від точки $A(3;4;5)$ до поверхні $(x-3)^2+y^2+z^2=16$, n — найбільше значення функції $y=17-(x-3)^2$ на відрізку $[2;5]$.

26.Скласти рівняння площини $f(x,y,z)=0$, яка проходить через точку $M(3;4;-5)$ паралельно до двох векторів $\vec{a}_1=(3;1;-1)$, $\vec{a}_2=(1;-2;1)$. Знайти повний диференціал функції $z=f(x,y)$ та обчислити його значення в точці (a,b,c), $(a<b<c)$, де a,b,c — порядки нетривіальних підгруп циклічної групи $\left\{\sqrt[16]{1}\right\}$.

27.Знайти проекцію $P(a,c)$ точки $M(-6;4)$ на пряму $4x-5y+3=0$. Побудувати нормований многочлен $f(x)$ третього степеня, коренями якого є a і c, а остача від ділення його на 1 рівна 12. Обчислити $\int\limits_{c}^{0}\frac{f(x)}{x-a}dx$.

28.Знайти інтегральну криву диференціального рівняння $(1+y^2)dx-kxydy=0$, що проходить через точку $C(x_0;y_0)$. Відомо, що $k=НСД(753{,}275)$, а $C(x_0;y_0)-$ протилежна до точки $A(-4;5)$ вершина квадрата з діагоналлю $7x-y+8=0$.

29.Знайти загальний розв’язок диференціального рівняння $y''+py'+qy=e^{-2x}$, де p – ранг матриці $A=\begin{pmatrix}1&2&-4&1\\2&1&-5&-1\\1&-1&-1&-2\end{pmatrix}$, q – відстань від точки $M(2;-1)$ до прямої $4x+3y+10=0$.

30. Розв’язати задачу Коші: $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0$, $y(a)=b$, де $a=\begin{vmatrix}1&2&4\\-2&1&-3\\3&-4&2\end{vmatrix}$, b – ордината точки перетину осі Oy і прямої, що проходить через точку $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ паралельно до прямої $y=2x$.

31. Обчислити $\int\limits_{b}^{a}f(x)dx$, де $f(x)$ — многочлен 3-го степеня із старшим коефіцієнтом, що дорівнює 1 і має корені $x_1=-1$, $x_2=2$, причому $f(3)=8$.

Відомо, що a і b — велика і мала півосі еліпса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, для якого $2c=6,\ \varepsilon=\frac{3}{5}$.

32. Показати, що вектори $\vec{a}=(3;-2;1),\ \vec{b}=(-1;1;-2),\ \vec{c}=(2;1;-3)$ лінійно незалежні. Знайти розклад вектора $\vec{d}=(11;-6;5)$ за базисом $\langle\vec{a},\vec{b},\vec{c}\rangle$: $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$. Знайти $\frac{\partial z(1;1)}{\partial x}+\frac{\partial z(1;1)}{\partial y}$, якщо $z=\alpha x^2+\beta y^2+\gamma xy$.

33. Знайти точку $M(x_0;y_0)$ — точку екстремуму функції $z=e^{\frac{x}{2}}\left(x+y^2\right)$. Записати рівняння гіперболи, вітки якої симетричні відносно початку координат, один із фокусів міститься в точці $M(x_0;y_0)$, а рівняння асимптот $y=\pm\frac{n}{n+1}$, де n — кількість підгруп групи $\left\{\sqrt[4]{1}\right\}$.

34. Записати загальне рівняння площини $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, де a і b $a<b$ — раціональні корені многочлена $f(x)=x^4-4x^3-13x^2+28x+12=0$, $c=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z=\ln(e^x+e^y)$.

35. Обчислити $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^3-2\lambda}{x^2-3x+2}$, якщо a — найменший додатний розв'язок конгруенції $27x\equiv 2\ (\mathrm{mod}\,13)$, λ — відношення, в якому точка $M(1;3;-2)$ ділить відрізок M_1M_2, де $M_1(-3;-1;2),\ M_2(2;4;-3)$.

36. Обчислити $\lim\limits_{x\to\alpha}\frac{p\cos 2x}{1-tg^2x}$, якщо α — внутрішній кут при вершині A трикутника з вершинами $A(-1;-2;4),\ B(-4;-2;0),\ C(3;-2;1)$, p — порядок групи самосуміщень прямокутника.

37. Обчислити площу S паралелограма, якщо відомо його три вершини $A(1;2;0),\ B(3;0;-3),\ C(5;2;6)$. Записати всі підгрупи групи $\left\{\sqrt[8]{1}\right\}$. Перевірити чи виконується рівність $\frac{\partial u(A)}{\partial x}+\frac{\partial u(A)}{\partial y}+\frac{\partial u(A)}{\partial z}=S$, якщо $u=x^2+y^4-z(xy+4)$.

38. Знайти похилу асимптоту графіка функції $y=4x+\frac{1}{x}$ і обчислити відстань d від неї до точки $(x_0,y(x_0))$, де x_0 — точка екстремуму даної функції. Записати многочлен найменшого степеня з цілими коефіцієнтами, що має корінь d.

39. Визначити точку перегину (x_0,y_0) кривої $y=ax^3+bx^2$, якщо a і b — цілі корені многочлена $g(x)=2x^3-3x^2-14x+15$. Через цю точку провести пряму перпендикулярну до прямої $y=g''(x)$.

40. Перевірити, чи утворюють базис вектори $\vec{a}=(2;2;-1),\ \vec{b}=(1;-1;2),\ \vec{c}=(2;1;3)$. Записати рівняння двох площин, що проходять через точку екстремуму функції $z=x^2+y^2-2\ln x-18\ln y$ та мають вектори нормалі $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відповідно. Знайти кут між цими площинами.

41. На кривій $y=x^3-3x+5$ знайти точки, в яких дотична перпендикулярна до прямої $ax+by=0$, де a — НСД многочленів $f(x)=x^3-1$, $g(x)=x^2+2x+1$, b – кількість підгруп групи $\{\sqrt[36]{1}\}$.
42. Знайти обвідну сім'ї прямих, що відтинають від сторін даного кута трикутник даного периметру.
43. Написати полярне рівняння кола, радіус якого дорівнює сумі $1+4\varepsilon+9\varepsilon^2+...+100\varepsilon^{99}$, якщо ε є одним з коренів 100-го степеня з одиниці.
44. Знайти найбільше і найменше значення функції:

$$f(x,y)=5\sin x\cos y+4\sin x\sin y+3\cos x.$$

45. Довести, що крива, всі нормалі якої проходять через одну й ту саму точку, є колом.
46. Знайти кути, під якими перетинаються синусоїда $y=\sin x$ та косинусоїда $y=\cos x$.
47. Доведіть, що для довільного натурального n:

$$\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-4}+\sqrt{n^2-9}+...+\sqrt{n^2-(n-1)^2}<\frac{\pi}{4}\cdot n^2.$$

48. Розв'язати рівняння : $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x+\left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x-2^{\frac{3}{2}x}=0.$
49. Знайти всі прості числа, які є одночасно сумами і різницями простих чисел.
50. Знайти найкоротшу відстань від точки $M_0(2;-1)$ до кривої $y=x^2$.
51. Визначити, при якому значенні h гвинтова лінія

$$x=a\cos t,\quad y=a\sin t,\quad z=ht$$

має найбільший скрут.

4.5. ПРИКЛАДНІ ЗАДАЧІ

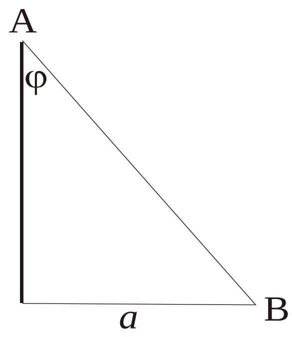
1. Береги річки — дві паралельні прямі. По різні боки від річки знаходяться села A і B. Де потрібно побудувати міст MN через річку (MN перпендикулярний берегам), щоб шлях $AMNB$ був найкоротшим?
2. В резервуар, який має форму прямого кругового конуса, опущеного вершиною вниз, наливається рідина з постійною швидкістю a (м²/с). З якою швидкістю підвищується рівень h рідини в резервуарі, якщо його висота дорівнює H (м), а радіус основи R (м)?
3. Вагон надземної залізниці, який проходить на висоті 9 м над землею, в деякий момент знаходиться над трамвайним вагоном, що їде. Шляхи їх утворюють прямий кут. Швидкість першого вагона $v_1=12$ м/с, другого — $v_2=6$ м/с. З якою швидкістю буде збільшуватись відстань між ними через $t=6$ с?
4. Вартість діаманта пропорційна квадрату його маси. При обробці діамант був розколотий на дві частини. Які маси цих частин, якщо відомо, що вартість діаманта було максимально втрачено.
5. Відкритий басейн з квадратним дном має об'єм 108 м³. Які повинні бути розміри басейна, щоб на обкладання його стінок і дна пішло найменше матеріалу?

6. Відрізок завдовжки l розділили на три частини, вибираючи будь-які дві точки поділу. Знайти ймовірність того, що з трьох утворених відрізків можна скласти трикутник.
7. Вікно має форму прямокутника, завершеного зверху півкругом. Периметр вікна 5м. Якими мають бути розміри вікна, щоб воно пропускало найбільшу кількість світла?
8. Два гірські мисливські господарства займаються заготівлею пушнини. Перше має склад в пункті A, а друге — в пунктах B і C. Відстані між пунктами однакові і дорівнюють m. Прямолінійна залізниця проходить через середини відрізків AB і AC. Вибрати місце для будівництва спільної для обох господарств перевалочної бази на залізниці так, щоб витрати обох господарств на перевезення вантажу вертольотами, які здійснюються один раз на день з кожного з пунктів A, B, C, були однаковими, якщо відомо, що транспортні витрати на перевезення прямо пропорційні квадрату відстані.
9. З усіх трикутників заданого периметра $2p$ визначити той, який має найбільшу площу.
10. Два літаки летять горизонтально на одній висоті під кутом 120^0 один до одного з однаковою швидкістю v. У деякий момент часу один з літаків прилетів в точку перетину шляхів, а другий в цей момент знаходився в a км від неї (не долетівши до точки перетину). Через який час після цього моменту відстань між літаками буде найменшою?
11. Два пароплави рухаються перпендикулярними курсами зі швидкостями 30 і 40 км/год відповідно. У початковий момент часу перший знаходився за 100 км, а другий — за 300 км від точки перетину ліній руху. Через який час відстань між пароплавами буде найменшою? Обчислити цю відстань.
12. Два судна повинні підійти до одного причалу. Появи суден — незалежні випадкові події, рівноможливі протягом доби. Знайти ймовірність того, що одному з суден доведеться чекати звільнення причалу, якщо час стоянки першого судна — одна година, а другого — дві години.
13. Двоє людей мали зустрітись в певному місці між сьомою і восьмою годиною. Вони домовились, що кожен чекає іншого протягом чверті години. Яка ймовірність того, що вони зустрінуться ?
14. Диск, кинутий спортсменом під гострим кутом до горизонту, впав на відстані 52 м від початкового положення. Визначити параметр параболічної траєкторії, яку описав диск, якщо найбільша висота, якої він досяг, дорівнює 10 м.
15. Ділянка землі має форму рівностороннього трикутника. Знайти довжину найкоротшої межі, що сполучає дві сторони ділянки і ділить її на дві рівновеликі фігури.
16. Для виготовлення металевого каркасу павільйону тропічних рослин у формі паралелепіпеда завезено дріт завдовжки 2880 м. Якими мають бути виміри каркасу найбільшого об'єму, якщо висота павільйону втричі більша за ширину?
17. Для складання екзамену студентам необхідно підготувати 30 питань. З 25 студентів 10 підготували всі питання, 8 – 25 питань, 5 – 20 питань і 2 – 15

питань. Студент, якого викликали, відповів на поставлене запитання. Знайдіть ймовірність того, що цей студент: а) підготував всі питання; б) підготував тільки половину питань.

18. Для проведення спортивних змагань потрібно побудувати найдовшу трасу, що з'єднує три пункти *A, B* і *C* прямолінійними ділянками так, щоб ці пункти знаходились на однаковій відстані від спостережного пункту *D*, а пункт *C* був рівновіддалений від *A* і *B*. Як розмістити пункти *A, B, C*, при умові, що відстань між пунктами *A* і *D* дорівнює d ?
19. Для трьох землеробних рівнопотужних господарств потрібно побудувати спільне зерносховище. Де вибрати місце для будівництва, щоб витрати господарств на перевезення зерна були мінімальними, якщо відомо, що вони дорівнюють квадрату відстані, на яку здійснюються перевезення, і виконуються однаковими транспортними засобами?
20. Із 20 студентів, які прийшли на екзамен, 8 підготовлені відмінно, 6 — добре, 4 — посередньо і 2 — погано. В екзаменаційних білетах є 40 питань. Студент, який підготовлений відмінно, знає всі питання, добре — 35, посередньо — 25 і погано — 10 питань. Деякий студент відповів на всі 3 питання білета. Знайдіть ймовірність того, що він підготовлений: а) «добре»; б) «погано».
21. З мідного круга радіусом R вирізають сектор з центральним кутом α і з нього скручують конічну лійку. При якому значенні кута α об'єм лійки буде найбільшим?
22. З дроту, довжина якого l, треба виготовити каркас прямокутного паралелепіпеда з найбільшим об'ємом. Знайти розміри цього паралелепіпеда.
23. За певний проміжок часу три токарі разом виготовляють 60 деталей, причому за цей проміжок часу перший і другий токар виготовляють в 3 рази більше, ніж третій, а перший і третій — в 2 рази більше, ніж другий. Скільки деталей виготовляє кожен з токарів за цей час?
24. Земля рухається по траєкторії, що є деяким геометричним місцем точок, яке володіє такою властивістю, що сума відстаней від будь-якої його точки до двох фіксованих точок є величина стала. Відомо, що Сонце знаходиться в одній з цих фіксованих точок. Найменша відстань від Землі до Сонця наближено дорівнює 147,5 млн. кілометрів, а найбільша — 152,5 млн. кілометрів. Записати рівняння траєкторії руху Землі, знайти велику піввісь та ексцентриситет.
25. Знайти розміри закритої циліндричної цистерни заданого об'єму V з найменшою повною поверхнею.
26. З усіх прямокутних паралелепіпедів з заданою сумою трьох взаємно перпендикулярних ребер знайти той, об'єм якого є найбільшим.
27. Із трьох дощок однакової ширини виготовляється жолоб. При якому куті нахилу бічних стінок до основи площа поперечного перерізу жолоба буде найбільшою?
28. Локомотив рухається вздовж горизонтальної ділянки шляху із швидкістю 72 км/год. Через який час і на якій відставні він буде зупинений гальмом, якщо опір руху після початку гальмування дорівнює 0,2 його ваги?

29. Край круглого столу радіусом a лежить книга. Відомо, що освітленість предмета В пропорційна косинусу кута φ (див. рисунок) і обернено пропорційна квадрату відстані від предмета до джерела світла А, визначити, на якій висоті над центром стола треба повісити світильник, щоб освітленість книги була найбільшою.



30. Матеріальна точка масою m рухається прямолінійно під дією сталої сили F. Опір середовища пропорційний швидкості руху. Знайти закон зміни швидкості руху точки, якщо початкова швидкість дорівнює 0.
31. Мідний куб, ребро якого дорівнює $a = 5$ см, рівномірно шліфувався з усіх боків. Знаючи, що вага його зменшилась на 0,96 г і вважаючи питому вагу міді рівною 8 (г/см^2), визначити, як зменшились розміри куба, тобто на скільки вкоротилося ребро куба.
32. На відстані c від заводу A прокладається по прямій до міста B залізниця. Під яким кутом α до проектованої залізниці треба провести шосе від заводу A, щоб доставка вантажів з A у B була найдешевшою, якщо вартість перевезення 1 т/км по шосе в m разів дорожча, ніж залізницею?
33. Є прямокутний лист жерсті розміром 50×60 см. У чотирьох його кутах вирізають однакові квадрати та роблять відкриту коробку, загинаючи краї під прямим кутом. Яка максимально можлива місткість такої коробки ?
34. На сторінці книги друкований текст займає S см^2. Верхнє і нижнє поля мають дорівнювати по a см, праве і ліве – по b і c см відповідно. Знайти розміри сторінки книги, при яких поля займають мінімальну площу.
35. На тіло діє сила, пропорційна часу. Крім того, опір середовища діє на рух тіла із силою, пропорційною швидкості. Знайти закон руху тіла.
36. Намет у вигляді циліндра, закритого конусом, побудований на круговій основі R і повинен мати об'єм V. Яким має бути кут при вершині осьового перерізу конуса, щоб кількість матеріалу, який піде на виготовлення намету, була найменшою?
37. Пліт підтягується до берега за допомогою каната, який намотується на коловорот із швидкістю 3 м/хв. Визначити швидкість руху плоту в той момент, коли його відстань від берега дорівнює 25 м, якщо коловорот розміщено на березі вище від поверхні води на 4 м.
38. По прямолінійному шосе їде екскурсійний автобус. В стороні від шосе розташований палац, від головного входу якого йде дорога, довжиною b, перпендикулярно до шосе. На якій відстані від точки перетину цих доріг потрібно зупинити автобус, щоб екскурсанти якнайкраще роздивились із автобуса фасад палацу, якщо довжина фасаду палацу $2a$ і фасад розташований під кутом 60^0 відносно шосе?
39. Прямокутний паралелепіпед, що має довжину 42 см, ширину 30 см і висоту 18 см, розрізали на однакові найбільші куби. Скільки буде таких кубів?

40. Прямокутну ділянку площею 900 м^2 необхідно огородити парканом, у якого дві суміжні сторони кам’яні, а дві інші — дерев’яні. Один метр дерев’яного паркану коштує 10 грн., а кам’яного – 25 грн. Чи вистачить на побудову паркану 2000 грн.?

41. Русла двох річок (в межах певної області) являють собою параболу $y = x^2$ і пряму $x - y - 2 = 0$. Потрібно з’єднати ці річки прямолінійним каналом найменшої довжини. Вказати координати точок на обох річках, які має з’єднати цей канал.

42. Село A знаходиться на відстані 18 км від шосе. На шосе за 30 км від найближчої до села точки шосе розташовано місто B. В яку точку шосе слід прокласти дорогу із села, щоб шлях від A до B займав якомога менше часу, якщо швидкість руху по шосе 50 км/год, а по путівцю – 30 км/год.

43. Серед усіх прямокутників, які мають дану площу S, знайти прямокутник з найменшою діагоналлю.

44. Станції A,B,C не лежать на одній прямій. Через них проходить три прямолінійні залізниці. Вибрати місце для будівництва нафтобази і полустанків (зупинок на залізниці, з яких здійснюється наступне транспортування) так, щоб середні витрати на перевезення однієї цистерни нафти, які здійснюються один раз на день з кожної з залізничних віток, були мінімальними. Провести дослідження.

45. Струмінь води фонтана досягає найбільшої висоти 4 м на відстані 0,5 м від вертикалі, що проходить через точку О виходу струменя. Знайти висоту струменя над горизонтом на відстані 0,75 м від точки О.

46. Сума довжини та обхвату поштового пакунка не повинна перевищувати 150 см. Визначити розміри пакунка циліндричної форми найбільшого об’єму.

47. Телефонний дріт довжиною 15м протягнуто від стовпа, де він закріплений на висоті 8м над поверхнею землі, до будинку, де його закріпили на висоті 20м. Знайти відстань між будинком і стовпом, припускаючи, що дріт не провисає.

48. Три міста A, B, C розташовані так, що $\angle ABC = 60^o$. Одночасно з міста A виходить автомобіль, а з міста B — поїзд. Автомобіль рухається у напрямку до B з швидкістю 80 км/год., а поїзд — до C з швидкістю 50 км/год. В який момент часу (від початку руху) відстань між поїздом і автомобілем буде найменшою, якщо $|AB| = 200$ км?

49. Три пункти A, B і C сполучені прямолінійними дорогами. До відрізка дороги AB прилягає квадратне поле зі стороною довжини $\frac{1}{2}|AB|$; до відрізка дороги BC прилягає квадратне поле зі стороною довжини $|BC|$, а до відрізка дороги AC прилягає ділянка лісу довжиною $|AC|$ і шириною 4 км. Площа лісу на 20 км^2 більше суми площ квадратних полів. Знайти площу лісу.

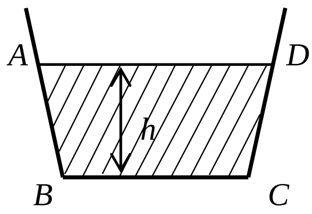
50. Тунель у перерізі має форму прямокутника, завершеного зверху півкругом. Площа перерізу тунелю S. Якими мають бути розміри прямокутника, щоб периметр тунелю був найменшим?

51. Турист іде з пункту A, розташованого на шосе, в пункт B, що знаходиться на відстані 8 км від шосе. Відстань AB по прямій 17 км. Швидкість туриста по шосе 5 км/год., по бездоріжжю – 3 км/год. В якому місці йому потрібно звернути з шосе, щоб за найкоротший час прийти в пункт B?
52. Із центра селища виходять дві вулиці: одна на північ, а інша – на схід. На одній вулиці треба збудувати школу, а на іншій – дитячий садок та прокласти між ними дорогу. На якій відстані від центра слід розмістити їх, щоб дорога між ними була найкоротшою, якщо площа трикутника, обмеженого трьома вказаними дорогами, має дорівнювати S ?
53. У шаховому турнірі брали участь 2 учні сьомого класу і кілька учнів восьмого класу. Семикласники набрали 8 очок, а кожний восьмикласник — порівну. Відомо, що кожний з кожним грав один раз. Скільки восьмикласників брали участь в турнірі ?
54. Через місто A проходить магістраль. Під яким кутом до магістралі слід прокласти дорогу з села B, щоб час руху від B до A був найкоротшим, якщо швидкість руху по дорозі вдвічі менша швидкості руху по магістралі.
55. Через село А, оточене з усіх боків лугами, проходить пряма шосейна дорога. Шосейною дорогою людина може рухатись зі швидкістю 5 км/год, а лугом—3 км/год (у будь-якому напрямі). Який маршрут має обрати людина, щоб якомога швидше потрапити з села А до хутора В, який лежить на відстані 13 км від села і 5км від дороги?
56. Школяр витратив деяку суму грошей на покупку портфеля, авторучки і книги. Якщо б портфель коштував в 5 разів дешевше, авторучка — в 2 рази дешевше, а книга — в 2,5 рази дешевше, ніж насправді, то та ж покупка коштувала б 8 грн. Якщо б портфель коштував в 2 рази дешевше, авторучка — в 4 рази дешевше, а книга — в 3 рази дешевше, то за ту ж покупку школяр заплатив би 12 грн. Скільки коштує вся покупка і що дорожче: портфель чи авторучка?
57. Як вибрати місце для будівництва станції на прямолінійній залізниці, яка обслуговуватиме населені пункти А і В, розміщені по одну сторону від залізниці, так, щоб затрати на будівництво шосейних доріг, що сполучають міста А та В зі станцією, були б мінімальними?
58. Як оптимально розбити грядку прямокутної форми площею 4 ари, щоб витрати на огорожу були мінімальними? Розв'язати задачу різними способами.
59. Які параметри матиме циліндр найбільшого об'єму, виточений з заданого прямого кругового конуса ?
60. Витрати за годину на плавання деякого судна з довільною сталою швидкістю складаються з двох частин: сталої, що дорівнює a грн., і змінної, яка пропорційна до кубу швидкості плавання (коефіцієнт пропорційності дорівнює $k, k>0$). З якою швидкістю v плавання судна буде найекономнішим, якщо судну необхідно проплисти з пункту A в пункт B, відстань між якими дорівнює S?
61. З пунктів A і B, розташованих на вулицях, які перетинаються під кутом 60°, одночасно виїжджають два велосипедисти в напрямку перехрестя C. Через який час відстань між ними буде найменшою, якщо швидкість

першого велосипедиста – 15 км/год, другого – 12 км/год, *AC*=9 км і *BC*=6 км?

62. Для огородження прямокутного квітника є l погонних метрів сітки. Одна із сторін квітника прилягає до стіни. Якими повинні бути сторони цього квітника, щоб він мав найбільшу площу?

63. Поперечний переріз відкритого каналу, що підводить воду до турбіни, має форму рівнобічної трапеції (нижня основа менша верхньої). При якому куті нахилу φ боків «мокрий периметр» перерізу (довжина ламаної *ABCD*) буде найменшим, якщо площа перерізу *ABCD* води в каналі дорівнює S, а рівень води дорівнює h?



64. У півкруг радіуса R вписано рівнобічну трапецію так, що одна її основа збігається з діаметром. Яке значення кута φ при основі трапеції, що має найбільший периметр?

65. Серед усіх прямокутних трикутників площі S знайти той, для якого площа описаного круга буде найменшою.

5. Для пільгових категорій осіб, яким надано право складати вступні випробування (особи, що потребують особливих умов складання випробувань) в НПУ імені М. П. Драгоманова за рішенням Приймальної комісії створюються особливі умови для проходження вступних випробувань.

6. СТРУКТУРА БІЛЕТУ ВСТУПНОГО ФАХОВОГО ВИПРОБУВАННЯ (СПІВБЕСІДИ)

Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

Фізико-математичний факультет

Ступень/ ОКР: магістр
Галузь знань: 11 Математика і статистика
Напрям підготовки/спеціальність: 111 Математика
На базі ступеня/ОКР: бакалавр, спеціаліст

Вступне фахове випробування

ЕКЗАМЕНАЦІЙНИЙ БІЛЕТ № 1

1. Многочлени над числовими полями: **C**, **R**, **Q** (звідність та незвідність, канонічна форма). Основна теорема алгебри.
2. Взаємнообернені операції у математиці.
3. Методика вивчення тотожних перетворень ірраціональних виразів.

4. Чи належать точки $M_1(2;-1;3)$, $M_2(3;3;-2)$, $M_3(-1;0;2)$, $M_4(a;b;-1)$ одній площині, якщо $a = \lim_{x\to 8} \frac{\sqrt{2x}-4}{\sqrt[3]{x}-2}$, b - менший дійсний корінь многочлена $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + 3x - 6$.

5. З усіх прямокутних трикутників із заданою площею S знайти такий, гіпотенуза якого має найменшу довжину.

7. РЕКОМЕНДОВАНА ЛІТЕРАТУРА

Література з алгебри і теорії чисел

1. *Завало С.Т.* Курс алгебри. — К.: Вища школа. — 1985. — 396с.
2. *Завало С.Т., Костарчук В.Н., Хацет Б.И.* Алгебра и теория чисел. Ч.І. — К.: Вища школа, 1977. — 400с.
3. *Завало С.Т., Костарчук В.Н., Хацет Б.И.* Алгебра і теорія чисел. Ч.ІІ. — К.: Вища школа, 1986. — 408с.
4. *Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокицький І.О.* Алгебра і теорія чисел. Практикум. Ч.І. — К.: Вища школа, 1983. — 232с.
5. *Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокицький І.О.* Алгебра і теорія чисел. Практикум. Ч.ІІ. — К.: Вища школа, 1986. — 264с.
6. *Куликов Л.Я.* Алгебра и теория чисел. — М.: Высшая школа, 1979. — 559с.
7. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Наука, 1971. — 432с.
8. *Проскуряков И.В.* Сборник задач по линейной алгебре. — М.: Наука, 1974. — 384с.
9. *Требенко Д.Я., Требенко О.О.* Алгебра і теорія чисел: У 2 ч. - К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2009. - Ч.1. - 420 с.
10. *Фадеев Д.К., Соминский И.С.* Сборник задач по высшей алгебре. — М.: Наука, 1977. –– 288с.

Література з геометрії

1. *Александров А.Д., Нецветаев Н.Ю.* Геометрия: Учебное пособие. — М.: Наука, 1990. — 672с.
2. *Атанасян Л.С.* Геометрия. Ч. І. — М.: Просвещение, 1973. — 456с.
3. *Атанасян Л.С., Атанасян В.А.* Сборник задач по геометрии. Ч. І. – М.: Просвещение, 1973. — 256с.
4. *Атанасян Л.С., Базылев В.Т.* Геометрия. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. В 2 ч. Ч. І. — М.: Просвещение, 1986. – 336с.
5. *Атанасян Л.С., Базылев В.Т.* Геометрия. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. В 2 ч. Ч. ІІ. — М.: Просвещение, 1987. – 352с.
6. *Атанасян Л.С., Гуревич Г.Б.* Геометрия. Ч. ІІ. — М.: Просвещение, 1976. — 447с.
7. *Базылев В.Т., Дуничев К.И.* Геометрия. Ч.І. — М.: Просвещение, 1974. — 351с.
8. *Базылев В.Т., Дуничев К.И., Иваницкая В.П.* Геометрия. Ч.І. — М.: Просвещение, 1974. — 351с.
9. *Білоусова В.П., Ільїн І.Г., Сергунова О.П., Котлова В.М.* Аналітична геометрія. — К.: Вища школа, 1973. — 328с.

10. *Вернер А.Л., Кантор В.Е.* Элементы топологии и дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1985. — 112с.
11. *Егоров И.П.* Геометрия. — М.: Просвещение, 1969. — 368с.
12. *Клетенник Д.В.* Сборник задач по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1968. – – 224с.
13. *Погорелов А.В.* Геометрия: Учебное пособие для вузов. — М.: Наука, 1984. — 288с.
14. *Працьовитий М.В.* Екзамен з аналітичної геометрії (I семестр). — К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2005.— 120с.
15. *Працьовитий М.В.* Екзамен з аналітичної геометрії (II семестр). — К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 2005.— 60с.
16. *Працьовитий М.В.* Аналітична геометрія. Теорія прямих на площині в аналітичному вигляді. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2011. – 80 с.
17. *Працьовитий М.В.* Векторна алгебра. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2011. – 144 с.
18. *Працьовитий М.*В. Геометричні перетворення. — К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2010. — 128с.
19. *Працьовитий М.В.* Екзамен з аналітичної геометрії (I семестр). — К.: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2004. — 92 с.
20. *Саранцев Г.И.* Сборник задач на геометрические преобразования. — М.: Просвещение, 1975. — 110с.
21. *Сергунова О.П., Котлова В.М.* Практикум з проективної геометрії. — М.: Вища школа, 1971. — 188с.
22. *Трайнин Я.Л.* Основания геометрии. — М.: Учпедгиз, 1969. — 325с.
23. *Цубербиллер О.Н.* Задачи и упражнения по аналитической геометрии. — М.: Наука, 1968. — 336с.

Література з математичного аналізу

1. *Давидов М.О.* Курс математичного аналізу. Ч.1–3. — К.:Вища школа, 1990, 1991, 1992.— 384, 392, 360с.
2. *Кудрявцев Л.Д.* Математический анализ. Т.1-2. — М.: Высшая школа, 1993.— 614с., 472с.
3. *Шкіль М.І.* Математичний аналіз. Ч.1–2. — К.:Вища школа, 1994. — 424с., 430с.
4. *Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М.* Вища математика. Кн. 1. — К.: Либідь, 1994.— 279с.
5. *Шкіль М.І., Колесник Т.В.* Вища математика . Кн. 2.— К.: Либідь, 1994. — 351с.
6. *Шкіль М.І., Колесник Т.В.* Вища математика . Кн. 3.— К.: Либідь, 1994. — 351с.
7. *Берман Г.Н.* Сборник задач по курсу математического анализа. — М.:Наука, 1985. — 383с.
8. *Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н.* Сборник задач по математическому анализу. — М.:Просвещение, 1973. — 254с.